| | |
|---|---|
| **Universitè Ibn Zohr** | **Module : Algèbre 1** |
| **École Nationale des Sciences Appliquées** | **Semestre 1** |
| **1ére année cycle préparatoire** | **Année universitaire : 2020-2021** |

**Serie 1 (Structures Algébriques)**

**6.** Sur $G = (-1, 1)$ on définit une loi $*$ par

$$\forall (x, y) \in G^2, x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Montrer $(G, *)$ est un groupe abélien.

**Solution :**
Voir la question (d) dans l'exercice 1.

**7.** Soit $w \in \mathbb{C}$ et $H = \{a + wb/a, b \in \mathbb{Z}\}$.
Montrer que $H$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}, +)$.

**Solution :**
**Rappel :** Caractérisation rapide des sous-groupes) Soit $\mathbb{H}$ une partie de $\mathbb{C}$. On a équivalence entre :

1. $H$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, *)$,
2. $\begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall x,\ y \in H, x * sym(y) \in H \end{cases}$

- On a $H = \{a + wb/a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ et $0 = 0 + \omega.0 \in H$.
- $\forall x, y \in H$, on peut écrire $x = a + \omega b$ et $y = a' + \omega b'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$.
  $x - y = (a - a') + \omega(b - b')$ avec $a - a' \in \mathbb{Z}$ et $b - b' \in \mathbb{Z}$ donc $x - y \in H$.

Ainsi $H$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}, +)$.

**8.** Soit $a$ un élément de $E$, on forme $H = \{f \in G(E)/f(a) = a\}$.

Montrer que $H$ est un sous groupe de $(G(E), o)$.

**Solution :**
On a $H \subset \mathbb{G}(E)$, $Id_E \in H$ car $Id_E(a) = a$.
$\forall f, g \in H$, $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(a) = a$ donc $f \circ g \in H$.
$\forall f \in H$, $f^{-1}(a) = f^{-1}(f(a)) = a$ car $f(a) = a$ donc $f^{-1} \in H$.
Ainsi $H$ est un sous groupe de $(\mathbb{G}(E), \circ)$.

**9.** Soit $(G, *)$ un groupe, $H$ un sous groupe de $(G, *)$ et $a \in G$.
(a) Montrer que $a * H * sym(a) = \{a * x * sym(a)/x \in H\}$ est un sous groupe de $(G, *)$.
(b) A quelle condition $a * H = \{a * x/x \in H\}$ est un sous groupe de $(G, *)$.

**Solution :**
(a) Utilisons la caractérisation rapide des sous-groupes. On a
- $a * H * sym(a) \subset G$, $e = a * e * sym(a) \in a * H * sym(a)$.
- $\forall a * x * sym(a) \in a * H * sym(a)$, $a * y * sym(a)$ avec $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned}(a * x * sym(a)) * sym(a * y * sym(a)) &= (a * x * sym(a)) * (sym(sym(a)) * sym(a * y)) \\ &= (a * x * sym(a)) * (a * sym(y) * sym(a)) \\ &= a * (x * sym(y)) * sym(a) \in a * H * sym(a),\end{aligned}$$

en effet $(x * sym(y)) \in H$ car $H$ un sous groupe de $(G, *)$.

(b) D'abord, il faut que $e \in a * H \Rightarrow sym(a) \in H$(car $e = a * sym(a)) \Rightarrow sym(sym(a)) = a \in H$. (car $H$ un sous groupe).
Inversement $a \in H \Rightarrow sym(a) \in H \Rightarrow a * H = H$ (car $a$ déja dans $H$).
La condition simple cherchée est $a \in H$.

$\forall a * x,\ \ a * y \in a * H,\ \ (a * x) * sym(a * y) = a * (x * sym(y)) * sym(a) \in a * H$ (car déja $(x * sym(y)) \in H$ car H un sous groupe.
Donc $a * (x * sym(y)) * sym(a) \in a * H$ si $a \in H$.
Ainsi la condition est $aH = H$.

**10.** Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle centre de $G$ la partie $C$ de $G$ définie par

$$C = \{x \in G / \forall y \in G \quad x * y = y * x\}.$$

Montrer que $C$ est un sous groupe de $(G, *)$ .

**Solution :**

$C$ c'est l'ensemble des éléments de $G$ qui commutent avec tous les éléments de $G$.

- On a $C \subset G$ et $e \in G$ car $\forall y \in G$, $e \star y = y = y \star e$ (càd $e$ commute avec tous les éléments de $G$).
- $\forall x, x^{'} \in C$, $\forall y \in G$, $(x \star x^{'}) \star y$
$= x \star (x^{'} * y)$ (car $(G, *)$ un groupe )
$= x * (y * x^{'})$ (car $x^{'} \in C$)
$= (x * y) * x^{'}$(car $(G, *)$ un groupe )
$= (y * x) * x^{'}$(car $x \in C$)
$= y * (x * x^{'})$. Donc $x \star x^{'} \in C$.
- $\forall x \in C$, $\forall y \in G$, $x \star sym(y) = sym(y) \star x$ donne $sym(x \star sym(y)) = sym(sym(y) \star x)$ i.e. $y \star sym(x) = sym(x) \star y$ donc $sym(x) \in C$ (car $sym(x)$ commute avec tous les éléments de $G$).
Ainsi $C$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

**11.** Soit $(G, *)$ un groupe et $a \in G$ on définit une loi de composition interne $T$ sur $G$ par

$$xTy = x * a * y.$$

(a) Montrer que $(G, T)$ est un groupe.
(b) Soit $H$ un sous groupe de $(G, *)$ et $K = sym(a) * H = \{sym(a) * x / x \in H\}$. Montrer que $K$ est un sous groupe de $(G, T)$.

**Solution :**

(a) $(G, T)$ est un groupe, en effet :
- La loi $*$ est associative, en effet :

$$\forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{G},\ \ (xTy)Tz = (x * a * y) * a * z$$

Puisque la loi $T$ est associative, donc

$$(xTy)Tz = x * a * (y * a * z) = xT(yTz)$$

- $(G, T)$ possède un élément neutre e, $e = sym_*(a)$, en effet :

$$xTsym_*(a) = x * a * sym_*(a) = x.$$

$$\text{et}\ \ sym_*(a)Tx = sym_*(a) * a * x = x.$$

- Tout élément x de $(G,T)$ est symétrisable, son symétrique est $x^{'} = sym_*(a) * sym_*(x) * sym_*(a)$, en effet :

$$\forall x \in G,\ xTx^{'} = x * a * sym_*(a) * sym_*(x) * sym_*(a) = sym_*(a) = e$$

$$\text{et } \forall x \in G,\ x^{'}Tx = sym_*(a) * sym_*(x) * sym_*(a) * a * x = sym_*(a) = e.$$

(a) $K$ est un sous groupe de $(G,T)$, en effet
- On a $K \subset G$ et $e = sym_*(a) * e \in K$ avec $e \in H$.
- Ona $\forall sym_*(a) * x,\ sym_*(a) * y \in K$

$$(sym_*(a) * x)Tsym_T(sym_*(a) * y) = (sym_*(a) * x)T(sym_*(a) * sym_*(sym_*(a) * y) * sym_*(a)$$

$$= (sym_*(a) * x) * a * (sym_*(a) * sym_*(y) * a * sym_*(a))$$
$$= (sym_*(a) * x) * sym_*(y)$$

puisque la loi $*$ est associative, on obtient

$$(sym_*(a) * x)Tsym_T(sym_*(a) * y) = sym_*(a) * (x * sym_*(y)).$$

**12.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = x^n$.
Montrer que $f$ est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$. Déterminer son image et son noyau.

**Solution :**

$f(xy) = (xy)^n = x^n y^n = f(x)f(y)$ donc $f$ est une endomrphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
Le noyau de f, l'ensemble $Kerf = \{x | f(x) = e = 1\} = Kerf = f^{-1}(\{1\})$.
L'image de f, l'ensemble $Imf = f(\mathbb{R}^*) = \{x^n / x \in \mathbb{R}^*\}$.
Si n est paire alors $kerf = \{1, -1\}$ (car $(1)^n = 1$ et $(-1)^n = 1$) et $Imf = \mathbb{R}^{+*}$ (car $n$ est pair, les images sont positives).
Si n est impaire alors $kerf = \{1\}$ ( car $(1)^n = 1$) et $Imf = \mathbb{R}^*$ (car $n$ est impair, les images sont dans $\mathbb{R}^*$).