Universitè Ibn Zohr	**Module : Algèbre 1**
École Nationale des Sciences Appliquées	**Semestre 1**
1ére année cycle préparatoire	**Année universitaire : 2020-2021**

Serie 1 (Structures Algébriques)

1. Dans chacun des cas étudier sur $\mathbb{E}$ la nature de la loi

(a) $\mathbb{E} = \mathbb{R}, x * y = xy - 2x - 2y + 6$.

(b) $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, $x * y = \ln(e^x + e^y)$.

(c) $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, $x * y = x + y + xy$.

(d) $\mathbb{E} = (-1, 1)$, $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$.

(e) $\mathbb{E} = [0, 1]$, $x * y = x + y - xy$.

Solution :

(a) On a $x * y = xy - 2x - 2y + 6 \in \mathbb{R}$ puisque $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Donc $*$ est bien une loi de composition interne.

- La loi $*$ est commutative, car la somme et le produit sont commutatives dans $\mathbb{R}$.
- La loi $*$ est associative, car : $\forall x,\ y$ et $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x * y) * z = (x * y)z - 2(x * y) - 2z + 6 &= (xy - 2x - 2y + 6)z - 2(xy - 2x - 2y + 6) - 2z + 6\\ &= xyz - 2xz - 2yz + 6z - 2xy + 4x + 4y - 12 - 2z + 6\\ &= xyz - 2xz - 2yz + 6z - 2xy + 4x + 4y + 4z - 6.\end{aligned}$$

De même, on obtient :
$x * (y * z) = xyz - 2xz - 2yz + 6z - 2xy + 4x + 4y + 4z - 6$

- L'élément neutre de $*$:
  e élément neutre de $* \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E},\ x * e = e * x = x$, car $*$ est commutative.
  $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E},\ xe - 2x - 2e + 6 = x$
  $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E},\ xe - 2e = x + 2x - 6$
  $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E},\ e(x - 2) = 3(x - 2)$
  Donc $e = 3$ est un élément neutre pour la loi $*$.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $x * y \in \mathbb{R}$. Donc la loi $*$ est une loi de composition interne.

- On a

$$x * y = \ln(e^x + e^y) = \ln(e^y + e^x) = y * x$$

La loi $*$ est commutative.

- Pour tous $x,\ y$ et $z \in \mathbb{R}$,

$$(x * y) * z = ln(e^{x*y} + e^z) = \ln(e^x + e^y + e^z) = \ln(e^x + e^{y*z}) = x * (y * z)$$

La loi $*$ est associative

- La loi $*$ n'admet pas un neutre, en effet

$$x * \varepsilon = x \Leftrightarrow \ln(e^x + e^\varepsilon) = x \Leftrightarrow e^\varepsilon = 0.$$

Il n'y a donc pas de neutre.

- On a

$$x * y = x * z \to \ln(e^x + e^y) = \ln(e^x + e^z) \to e^y = e^z \to y = z.$$

Donc tout élement est régulier.

(c) On a $x * y = x + y + xy \in \mathbb{R}$ puisque $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Donc $*$ est bien une loi de composition interne.

- La loi $*$ est commutative, car la somme et le produit sont commutatives dans $\mathbb{R}$.
- La loi $*$ est associative, car : $\forall x,\ y$ et $z \in \mathbb{R}$

$$x * (y * z) = x * (y + z + yz) = x + y + z + yz + x(y + z + yz).$$

  Comme cette expréssion est invariante par permutation circulaire sur $x,\ y$ et z, on obtient le même résultat en partant de $(x * y) * z$. Donc la loi $*$ est associative.
- 0 est un élément neutre de $*$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x * 0 = 0 * x = x + 0 + x.0 = x$$

- Les éléments symétrisables. Soit $x \in \mathbb{E}$, on résout l'équation "$x * y = 0$". On a :

$$x * y = 0 \Leftrightarrow x + y + xy = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x}{x+1} \text{ si } x \neq -1.$$

(d) $*$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{E}$, en effet, si $x,\ y \in \mathbb{E}$, alors $x * y \in \mathbb{E}$. Pour prouver cela, étudions la fonction définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(t) = \frac{t + y}{1 + ty}.$$

Elle est dérivable sur $[-1, 1]$, et sa dérivée vérifie

$$f'(t) = \frac{1 - y^2}{(1 + ty)^2} > 0 \text{ sur }]-1, 1[.$$

f est donc strictement croissante sur $[-1, 1]$ et on a

$$f(-1) < x * y = f(x) < f(1).$$

Comme $f(-1) = \frac{-1+y}{1-y} = -1$ et $f(1) = \frac{1+y}{1+y} = 1$, on obtient bien que $x * y \in]-1, 1[$.

- La loi $*$ est clairement commutative.
- La loi $*$ est associative, en effet pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$, on a

$$x * (y * z) = \frac{x + (y * z)}{1 + x(y * z)} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz},$$

  et un calcul similaire donne le même résultat pour $(x * y) * z$.
- 0 est un élément neutre pour la loi $*$. En effet,

$$x * 0 = 0 * x = \frac{x + 0}{1 + 0} = x.$$

- Tout élément $x \in \mathbb{E}$ est symétrisable, son symétrie est $-x$. En effet,

$$x * (-x) = (-x) * x = \frac{x - x}{1 - x^2} = 0.$$

(e) $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{E}$, car $\forall x$ et; y, on a

$$x,\ y \in \mathbb{E} \Rightarrow (0 \leq x \leq 1) et (y \geq 0) \Rightarrow (xy \leq y) et (0 \leq x)$$

$$\Rightarrow (y - xy \geq 0) et (x \geq 0) \Rightarrow x + y - xy \geq 0$$
$$\Rightarrow x * y \geq 0.$$

De même, on a :

$$x * y - 1 = x + y - xy - 1 = x - 1 + y(1 - x) = (1 - x)(y - 1)$$

donc, si $x,\ y \in \mathbb{E}$, alors $(1 - x \geq 0) et (y - 1 \leq 0) \Rightarrow x * y - 1 \leq 0$, par suite :

$$\forall x, y \in \mathbb{E},\ \ 0 \leq xy \leq 1,$$

ce qui montre que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{E}$.

- $*$ est associative, car la somme et le produit sont comutatives dans $\mathbb{R}$.
- $*$ est associative, car $\forall x\ \ y,\ z \in \mathbb{E}$,

$$x * (y * z) = x + (y * z) - x * (y * z) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz)$$

$$= x + y + z - yz - xy - xz + xyz$$
$$(x * y) * z = (x * y) + z - (x * y) * z = (x + y - xy + z - (x + y - xy)z$$
$$= x + y - xy + z - xz - yz + xyz,$$

  d'où on déduit que

$$\forall\ y,\ z \in \mathbb{E},\ \ x * (y * z) = (x * y) * z,$$

  donc $*$ est associative.

- L'élément neutre de $*$:
  e élément neutre $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E},\ \ x * e = e * x$, car $*$ est commutative

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E},\ \ x + e - xe = x \Leftrightarrow e(1 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e = 0.$$

- Les éléments symétrisables. Soit $x \in \mathbb{E}$, on résout l'équation "$x * y = e$". On a :

$$x * y = e = 0 \Leftrightarrow x + y - xy = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{x - 1} \text{ si } x \neq 1,$$

  reste à vérifier si $y \in \mathbb{E}$, or $\forall x \notin \{0, 1\}$, on a

$$(0 < x < 1) \Rightarrow (x > 0) et (x - 1 < 0) \Rightarrow \frac{x}{x - 1} < 0 \Rightarrow y = \frac{x}{x - 1} \notin \mathbb{E},$$

  donc le seul élément symétrisable dans $\mathbb{E}$ est
  $x = 0$ (l'élément neutre de $*$).

– Les éléments réguliers. Soit $x_0 \in \mathbb{E}$, $*$ étant commutative, alors :

$$\begin{aligned} x_0 \text{ élément régulier} &\Leftrightarrow \forall x,\ y \in \mathbb{E},\quad (x_0 * x = x_0 * y) \Rightarrow (x = y) \\ &\Leftrightarrow \forall x,\ y \in \mathbb{E},\quad (x_0 + x - x_0 x) = (x_0 + y - x_0 y) \Rightarrow (x = y) \\ &\Leftrightarrow \forall x,\ y \in \mathbb{E},\quad (x - x_0 x) = (y - x_0 y) \Rightarrow (x = y) \\ &\Leftrightarrow \forall x,\ y \in \mathbb{E},\quad (x - y)(1 - x_0) \Rightarrow (x = y) \\ &\Leftrightarrow 1 - x_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des éléments réguliers de $*$ est $\mathbb{E}$ sauf 1.

Remarque : On sait que tout élément symétrisable est régulier, cette loi $*$ nous donne un exemple où des éléments sont réguliers sans qu'ils soient symétrisables.

2. Soit a un élément d'un monoide $(\mathbb{E}, *)$. Montrer que a est symétrisable ssi l'application $f : \mathbb{E} \Rightarrow \mathbb{E}$ définie par $f(x) = a * x$ est bijective.

Solution :

Supposons que a est symétrisable, donc il existe b son symétrique unique (car $(\mathbb{E}, *)$ est un monoide, c.a.d $a*b = b*a = e$). Soit l'application g définie de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}$ par $g(x) = a^{-1}*x$. On a $fog = gof = Id_{\mathbb{E}}$, donc f est bijective.
Inversement, on suppose que f est bijective alors f est injective et surjective. Puisque f est surjective, nous considérons b l' antécédent de l'élément neutre e, on a $a * b = e$. Nous calculons maintenant $f(b * a) = a * (b * a) = a * e = f(e)$ et puisque cette fois ci f est injective, on obtient $b * a = e$.
Par suite, $a * b = b * a = e$ donc a est symétrisable et b est son symétrique.

3. Soit E et F deux ensembles et $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une application bijective. On suppose $\mathbb{E}$ muni d'une loi de composition interne $*$ et on définit une loi T sur $\mathbb{F}$ par :

$$\forall\ x,\ y \in \mathbb{F},\ xTy = \varphi(\varphi^{-1}(x) * \varphi^{-1}(y)).$$

(a) Montrer que $*$ est commutative(resp. associative) alors T l'est aussi.
(b) Montrer que $*$ possède un élément neutre e alors T possède un élément neutre à préciser.

Solution :

(a) Supposons que $*$ est commutative :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{F},\quad y\top x = \varphi(\varphi^{-1}(y) * \varphi^{-1}(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x) * \varphi^{-1}(y)) = x\top y.$$

Donc $\top$ est commutative.
Supposons que $*$ associative :

$$\begin{aligned} \forall x,\ y \in \mathbb{F},\quad (x\top y)\top z &= \varphi(\varphi^{-1}(x\top y) * \varphi^{-1}(z)) = \varphi((\varphi^{-1}(x) * \varphi^{-1}(y)) * \varphi^{-1}(z)) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(x) * \varphi^{-1}(yTz)). \\ &= x\top(y\top z). \end{aligned}$$

Donc $\top$ est associative.

(b) Supposons que $\star$ possède un neutre e et montrons que $f = \varphi(e)$ est neutre pour $\top$ donc $e = \varphi^{-1}(f)$. $\forall x \in F$, $x\top f = \varphi(\varphi^{-1}(x) \star e) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$ et $f\top x = \varphi(e \star \varphi^{-1}(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$ donc f est neutre pour $\top$.

4. Soit E un ensemble munit de deux lois de composition internes $*$ et o admettant chacune un élément neutre respectif e et f telles que :

$$\forall (x,y,u,v) \in \mathbb{E}^4 \ \ (x*y)o(u*v) = (xou)*(yov).$$

Montrer que $e = f$.

Solution :

Puisque e est un élément neutre de $*$, on obtient :

$$e*(yov) = (yov) = (e*y)o(e*v) = (eoe)*(yov)$$

cela impique $e = eoe$, or l'élement neutre de o est f, donc $e = f$.
ou
Puisque f est un élément neutre de o, on obtient :

$$(f*f)o(u*v) = (fou)*(fov) = (u*v) = (u*v)of$$

et comme f est unique $f = f*f$, or l'élement neutre de $*$ est e, domc $f = e$.

Autre méthode : On a

$$f = fof = (f*e)o(e*f) = (foe)*(foe) = e*e = e.$$

5. Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi de décomposition interne définie sur G par

$$(x,y)*(x',y') = (xx', xy' + y)$$

(a) Montrer que $(G,*)$ est un groupe non commutatif.
(b) Montrer $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ est un sous groupe de $(G,*)$.

Solution :

(a) On a

$$\begin{aligned}\Big((x*y)*(x',y')\Big)*(x'',y'') &= (xx', xy'+y)*(x'',y'') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Big(x*y)*\Big((x',y')*(x'',y'')\Big) &= (x,y)*(x'x'', x'y''+y') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y).\end{aligned}$$

Donc la loi $*$ est associative.

L'élément neutre de la loi $*$ est $(1,0)$, en effet

$$(x,y)*(1,0) = (x,y) \ \text{ et } \ (1,0)*(x,y) = (x,y).$$

Le symétrique de (x,y) est $\left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}\right)$, en effet

$$\forall (x,y) \in G, \ (x,y)*\left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}\right) = (1, -y+y) = (1,0)$$

$$\text{et } \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}\right) * (x, y) = (1, 0).$$

Tout élément de G est symétrisable.

Par conséquent $(G, *)$ est un groupe. Il est non commutatif car

$$(1, 2) * (3, 4) = (3, 6) \text{ et } (3, 4) * (1, 2) = (3, 10).$$

(b) On a $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ est inclus dans G et $(1, 0) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.

$$\forall (x, y),\ (x^{'}, y^{'}) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \ (x, y) * (x^{'}, y^{'}) = (xx^{'}, xy^{'} + y) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \text{car } xx^{'} > 0.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \ \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}\right) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \text{car } \frac{1}{x} > 0.$$

Ainsi $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ est un sous groupe de $(G, *)$.