Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2018-2019

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algèbre 2 – D.S.2- le 21/05/2019-Durée: 2h:00mn

N. B. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constituent des éléments essentiels dans l'appréciation de la copie.

Questions de compréhension :

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse (Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte):

1) Toute matrice diagonalisable admet une base orthonormée de vecteurs propres? *(1 point)*
2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si A^2 est diagonalisable alors A aussi. *(1 point)*
3) La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable. *(1 point)*

Exercice 1

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle trigonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$? Si oui la trigonaliser. *(2 points)*

2) Soient n un entier naturel non nul et $M = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{R})$, avec $a_{i,i+1} = 1 \ \forall\, i \in \{1, \dots\dots n\}$ et tous les autres coefficients sont nuls.

a) M est-elle diagonalisable ? *(1 point)*

b) Calculer M^n. *(2 points)*

c) Sachant que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors $A^k = 0$, pour au moins un $k \le n$, montrer que M n'a pas de racine carrée. *(2 points)*

Exercice 2

Soient $(E, (.\backslash.))$ un espace euclidien de dimension n, $x_0 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer $\{x \in E \,/\, (x\backslash x_0) = \alpha\}$. Est-il un espace euclidien. Si oui quelle est sa dimension? *(2points)*

2) Supposons que $n \ge 2$ et soit f l'application de E dans E telle que $f(x) = x + \alpha(x\backslash x_0)x_0$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de E. *(1 point)*

b) Montrer que f est symétrique i.e. $(f(x)\backslash y) = (x\backslash f(y)), \forall (x,y) \in E^2$. *(1 point)*

c) Déterminer les valeurs propres de f ainsi que leurs sous espaces propres. *(2 points)*

3) Soit $(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) \in (\mathbb{R})^n$.

a) Montrer que : $n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$. *(2 points)*

b) Préciser le cas d'égalité. *(1 point)*

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Dans EXE on définit l'application φ par :

$\varphi\left(\sum_{i=0}^{3} a_i X^i, \sum_{i=0}^{3} b_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire. *(1 point)*
2) Montrer que $\mathcal{B} = (-X + 1, X^2 + X, X^3 + 2X^2, 3X^3 + 1)$ est une base de E. *(1 point)*
3) Orthonormaliser la base $\mathcal{B}$ relativement à φ. *(2 points)*

Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2018-2019

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algèbre 2 – D.S.1- le Mardi 19/03/2019 -Durée: 2h:00mn.

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K, f une forme n-linéaire alternée de E et $(X_1, X_2, \dots\dots, X_n) \in E^n$. Calculer en fonction de $f(X_1, X_2, \dots\dots, X_n)$:

1) $f(X_1, X_1 + X_2, \dots\dots, X_1 + X_2 + \cdots + X_k, \dots\dots, X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. *(1 point)*
2) $f(X_1 + X_2, X_2 + X_3, \dots\dots, X_k + X_{k+1}, \dots\dots, X_{n-1} + X_n, X_n + X_1)$. *(2 points)*

Exercice 2

1) Calculer le déterminant suivant : $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ *(2 points)*

2) Calculer $D_n = det(a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ avec: $a_{i,i} = a_{1,j} = a_{i,1} = 1$ et $a_{i,j} = 0 \ \forall\, (i,j) \in \{1, \dots\dots, n\}^2$. *(2 points)*

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $b \neq c$ et $A = A(a,b,c) = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$, avec $a_{i,i} = a \ \forall\, i \in \{1, \dots\dots n\}$, $a_{i,j} = b$ si $i < j$ et $a_{i,j} = c$ si $i > j$. Soient $B = A(1,1,1)$ et f la fonction réelle de la variable réelle définie par : $f(x) = \det(A + xB) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \alpha x + \beta$. *(2 points)*
2) Calculer $f(-b)$ et $f(-c)$. *(1 point)*
3) En déduire les valeurs de α et β. *(2 points)*
4) En déduire la valeur de $detA$. *(1 point)*

Exercice 4

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degrés au plus n et f l'application de E dans E définie par $f(P) = XP' + P(1) \ \forall P \in E$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E. *(1 point)*
2) déterminer la matrice de f dans la base canonique de E. *(2 points)*
3) En déduire que $f \in Aut(E)$. *(2 points)*

Exercice 5

Résoudre les systèmes (S_1) et (S_2) respectivement par la méthode de Cramer et celle de Gauss (Aucune autre méthode n'est acceptée):

$$(S_1)\begin{cases} 2x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad \textit{(2 points)}$$

$$(S_2)\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 10 \\ 2x + 3y + 4z + t = 10 \\ 3x + 4y + z + 2t = 10 \\ 4x + y + 2z + 3t = 10 \end{cases} \quad \textit{(2 points)}$$

Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2017-2018

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algèbre 2 – D.S.2- le 8/06/2018 -Durée: 2h:00mn

Question de cours :
La proposition suivante est-elle vraie? Sinon la corriger et justifier votre réponse. ***(1point)***
Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors le déterminant de A est le produit des valeurs propres de A dans $\mathbb{R}$ comptées avec multiplicités.

Exercice 1

1) Étudier, sans calcul, la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \alpha & b & 0 \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix}$ selon $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^6$. ***(1point)***

2) La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? B est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Si oui la diagonaliser. ***(2points)***

3) Pour quelles valeurs de m la matrice $C(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? ***(2points)***

Exercice 2

1) Déterminer les valeurs propres et leurs sous espaces propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ***(2points)***

2) M est-elle diagonalisable? M est-elle trigonalisable? Si oui déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale/ triangulaire supérieure. ***(2points)***

Exercice 3

Soit A la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.
1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A. Déterminer $Im(f)$. ***(1point)***
2) Quelle est la dimension de $Ker(f)$? En déduire, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous espaces propres de la matrice A. ***(2points)***
3) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est $M = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ où tous les $a_{i,j}$ sont nuls sauf $a_{n,n} = n$. ***(2points)***

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Dans EXE on définit l'application φ par :
$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ pour tout $(P,Q) \in E^2$.
1) Montrer que φ est un produit scalaire. ***(1 point)***
2) Orthonormaliser la base canonique de $F = \{P \in E / P(0) = 0\}$ relativement à φ. ***(1point)***
3) Déterminer une base orthonormale de $F^{\perp}$ et en déduire une base orthonormale de E . ***(1point)***

Exercice 5

Pour tout réel a on considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer l'ensemble N des réels a pour lesquels $M(a)$ n'est pas diagonalisable. ***(2points)***
2) Montrer que pour tout a dans N il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}\cancel{A}P$ soit triangulaire supérieure. ***(2points)***

M(a)

Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2016-2017

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algèbre 2 - DS Rattrapage-Agadir le 19/06/2017 Durée: 2h:00mn

Exercice 1 1) Résoudre par la méthode de Gauss le système : $(S_1)\begin{cases} x+2y-z+t=8 \\ x+y+t=6 \\ 3x-2y+5z+t=2 \\ x+2y-z+3t=14 \end{cases}$ *(2 points)*

2) Résoudre par la méthode de Cramer le système: $(S_2)\begin{cases} x+y-z=8 \\ x+2y-3z=5 \\ 3x-3y-z=2 \end{cases}$ *(2 points)*

Exercice 2 1) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on considère la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & a \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est diagonalisable? La diagonaliser. *(2 points)*

2) la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle trigonalisable? Si oui la trigonaliser. *(2 points)*

Exercice 3 Soit $\|.\|$ une norme, sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie E, vérifiant l'identité du parallélogramme. Dans EXE on définit l'application f par $f(x,y) = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2)\ \forall (x,y) \in E^2$.

1) Montrer que : $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2f(x,y)\ \forall (x,y,z) \in E^3$. *(2 points)*

En déduire que $f(2x,y) = 2f(x,y)\ \forall (x,y) \in E^2$. *(1 point)* → 4

2) Montrer que $f(nx,y) = nf(x,y)\ \forall (x,y) \in E^2\ \forall n \in \mathbb{N}$. *(1 point)*

En déduire que $f(rx,y) = rf(x,y)\ \forall (x,y) \in E^2\ \ \forall r \in \mathbb{Q}$. *(1 point)*

3) Soit $(x,y,z) \in E^3$. En posant $u = \frac{1}{2}(x+y)$ et $v = \frac{1}{2}(x-y)$.

Montrer que $f(x,z) + f(y,z) = f(x+y,z)$. *(1 point)*

4) On admet que $f(\alpha x,y) = \alpha f(x,y)\ \forall (x,y) \in E^2\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bilinéaire. *(1 point)*

5) Montrer que f est un produit scalaire et $\|.\|$ est sa norme associée. *(1 point)*

Exercice 4 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3 X \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$f(X,Y) = 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$ où $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que f est un produit scalaire. *(2points)*

2) Déterminer la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}$. *(1 point)*

3) Soit $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x\}$. Déterminer une base orthonormale de P et une base orthonormale de $P^{\perp}$ pour ce produit scalaire. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ pour ce produit scalaire. *(3 points)*

Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2016-2017

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algèbre 2 – D.S.2- le 7/06/2017-Durée: 2h:00mn

Exercice 1

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Si oui la diagonaliser. *(2points)*

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

B est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? B est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Si oui la diagonaliser. *(2points)*

3) Soit $C = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

C est-elle trigonalisable dans $\mathbb{R}$? C est-elle trigonalisable dans $\mathbb{C}$? Si oui la trigonaliser. *(2points)*

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1) M est-elle diagonalisable? Si oui la diagonaliser. *(2points)*

2) On considère les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par leurs premiers termes u_0, v_0 et w_0 et les relations de récurrences : $\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Exprimer X_{n+1} en fonction de M et X_n. *(1point)*

b) Calculer M^n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0. *(2points)*

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, soit le sous espace vectoriel :

$F = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ tel que } x_1 + x_2 = 0 = x_3 + x_4 = 0\}$.

1) Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$. *(2points)*

2) Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_F sur F. *(2points)*

3) Pour $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, déterminer la distance de X à F : $d(X, F) = \| X - p_F(X) \|$. *(2points)*

Exercice 4

Soit $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dans $E X E$ on définit l'application φ par :

$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$ pour tout $(f, g) \in E X E$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire. *(1 point)*

Dans la suite on considère $\mathbb{R}_4[X]$ muni de ce produit scalaire

2) Orthonormaliser la base canonique de $F = \mathbb{R}_3[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] / d°P \leq 3\}$. *(2 points)*

3) Déterminer la dimension et une base orthonormale de $F^\perp$. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}_4[X]$. *(2points)*

Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2015-2016

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algèbre 2 – D.S.2- le 31/05/2016-Durée: 2h:00mn

Exercice 1

1) Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^2 + I = 0$, où I est la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A n'a pas de valeurs propres réelles. *(2 points)*

b) En déduire le nombre de matrice carrée d'ordre 5 à coefficients réels vérifiant : $A^2 + I = 0$.

(1 point)

2) Une matrice semblable à une matrice diagonalisable est-elle diagonalisable? Justifier votre réponse. *(1 point)*

3) Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique sont-elles semblables? Justifier votre réponse. *(1 point)*

Exercice 2

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

a) Déterminer, selon les valeurs de α, les valeurs propres de A_α ainsi que leurs multiplicités. *(2 points)*

b) Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle diagonalisable? *(2 points)*

2) Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle trigonalisable? A_0 $(\alpha = 0)$ est-elle trigonalisable? Si oui la trigonaliser. *(2 points)*

Exercice 3

Soit $P(X) = X^4 + \frac{1}{4}X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{4}$.

1) Montrer que $\frac{1}{2}$ est une racine de P. Quelle est sa multiplicité? *(2 points)*

2) En déduire la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$ puis dans $\mathbb{C}(X)$. *(2 points)*

Exercice 4

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, soit $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,-1,1)$ et $F = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$.

a) Déterminer une base orthonormale de F. *(2 points)*

b) Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$. *(2 points)*

c) En dédúir une base orthonormale de E. *(1 point)* Justifier votre choix.

Exercice 5

Soient $E_n = \{P \in \mathbb{R}[X]\ tel\ que\ P = 0\ ou\ d°P \leq n\}$ et l'application $f: E_n \times E_n \to \mathbb{R}$ définie par :

$f(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

1)Montrer que f est un produit scalaire. .*(1 point)*

2) Orthonormaliser la base canonique de E_3 . *(3 points)*

Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2015-2016

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algèbre 2 – D.S.1- le 30/03/2016-Durée: 2h:00mn

Exercice 1

1) Soit f la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Ecrire l'expression analytique de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. *(1 point)*

b) f est-elle symétrique? f est-elle alternée? Justifier vos réponses. *(1 point)*

c) Déterminer la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (0,0,1)$. *(2 points)*

d) Vérifier la formule de changement de base reliant M et M'. *(2 points)*

2) Soit g la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$g(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2(x_1y_3 + x_3y_1) + 2(x_2y_3 + x_3y_2)$ avec $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$.

a) g est-elle symétrique? g est-elle alternée? Justifier vos réponses. *(1 point)*

b) Déterminer la matrice A de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. *(1 point)*

Exercice 2 Soient n un entier naturel non nul, a un réel et $A_n = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{R})$, avec $a_{i,i} = a \;\forall i \in \{1, \dots\dots n\}$, $a_{i,n} = n - i \;\forall i \in \{1, \dots\dots, n-1\}$.
$a_{n,j} = n - j \;\forall j \in \{1, \dots\dots, n-1\}$, et $a_{i,j} = 0$ ailleurs. On pose $\Delta_n = \det A_n$.

1) Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} . *(2 points)*

2) En déduire Δ_n en fonction de n pour $n \geq 2$. *(2 points)*

Exercice 3 1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer, selon la valeur de n, la parité de la permutation P suivante :

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots\dots\dots\dots\dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots\dots\dots\dots\dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *(1 point)*

b) Soit $p \in \{1, \dots\dots n\}$. Déterminer, selon la valeur de n et p, la parité de la permutation

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & n \\ p+1 & p+2 & \dots\dots n & 1 & 2 \dots\dots\dots\dots & p \end{pmatrix}$. *(2 points)*

1) Pour toute permutation $\sigma \in S_n$ on définit la matrice

$P_\sigma = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ est le symbole de Kronecker.

a) Montrer que $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$. *(2 point)*

b) Calculer $P_\sigma . P_{\sigma'}$, pour $(\sigma, \sigma') \in (S_n)^2$. Pour quelles $\sigma \in S_n$, P_σ est-elle inversible? *(2 points)*

Exercice 4

Résoudre le système (S_1) par la méthode de Cramer et (S_2) par la méthode du pivot de Gauss.

$(S_1)\begin{cases} 2x - y - z - t = -1 \\ x - 2y + z + t = -2 \\ x + y - 2z + t = 4 \\ x + y + z - 2t = -8 \end{cases}$ *(2 points)* $(S_2)\begin{cases} x - y - 2z - t = 0 \\ 2x + y - 3z - t = 0 \\ x - 2y - z - t = 0 \\ 4x + 3y - 7z - 2t = 0 \end{cases}$ *(2 points)*

Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2014-2015

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algèbre 2 - DS1-Agadir le 01/04/2015-Durée: 2h:00mn

Exercice 1. Soient a et b deux éléments de $\mathbb{C}$.

$12X+a+b$

$2x+a+b$

1) Calculer le déterminant: $P(X) = \begin{vmatrix} X & a & b & X \\ a & X & X & b \\ b & X & X & a \\ X & b & a & X \end{vmatrix}$. (2points)

$\det = (b-a)^2$

2) Déterminer x pour que les vecteurs: $u_1 = (x, a, b, x)$, $u_2 = (a, x, x, b)$, $u_3 = (b, x, x, a)$ et $u_4 = (x, b, a, x)$ constituent une base de $\mathbb{C}^4$. (2points) $\Rightarrow \det \neq 0$

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que $rg(A) \geq 2$. (1point)

2) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $rg(A) = 2$. (2points)

Exercice 3 Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments d'un corps K et $M_n = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ avec $a_{i,j} = a_{\inf(i,j)}$ $\forall (i,j) \in \{1, \ldots \ldots n\}^2$ la matrice associée à ce n-uplet.

1) Sans calculer le déterminant, donner une condition nécessaire pour que M_n soit inversible. (2points)

2) En considérant le système linéaire homogène $M_n X = 0$, montrer que cette condition est aussi suffisante. (2points)

3) Résoudre le système linéaire $M_n(1,2, \ldots, n)X = 0$. (1point)

4) Calculer le déterminant $D_n = \det(M_n)$. (2points)

5) En déduire que la matrice $(\inf(i,j))_{0 \leq i \leq j \leq n}$ est inversible. (1point)

6) En considérant le système linéaire $M_n(1,2, \ldots, n)X = Y$, montrer que $M_n(1,2, \ldots, n)$ est inversible et calculer son inverse. (2points)

Exercice 4 Résoudre les système linéaire (S) dans les cas suivants: Pivot gauss

1) $(S)\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 3y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = 10 \end{cases}$ (1,5point)

2) $(S)\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$ (1,5point)

Exercice 5 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $M_n(x) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})_{0 \leq i,j \leq n}$ avec

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 + x^2 & Si\ i = j \\ -x & Si\ j \in \{i-1, i+1\} \\ 0 & Si\ j \notin \{i, i-1, i+1\} \end{cases}$$

1) Montrer que $D_n(x) = \det M_n(x)$ est un polynôme. Déterminer son degré et le coefficient de son terme de plus haut degré. (1point)

2) Calculer $D_n(x)$. (2points)

Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2013-2014

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algebre 2 - DS Rattrapage-Agadir le 21/06/2014-

Durée: 2h:30mn

Exercice 1

Soit le système:

$$(S)\begin{cases} x-3y-z=2 \\ -x+y+2t=3 \\ y-z=1 \\ 2x+y-t=0 \end{cases}$$

1) Résoudre (S) par la méthode de Gauss (Aucune autre méthode n'est acceptée).

2) Calculer le déterminant $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. Quel est le rang de $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3) En déduire les valeurs des déterminants suivants:

$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $D_3=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ et

$D_4=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 2

Soit $(E,(./.))$ un espace euclidien, $\|.\|$ désigne sa norme.

1) Soient x et y deux éléments de E tels que $\|x\|^2=\|y\|^2$.

a) A-t-on nécessairement $x=y$ ou $x=-y$.

b) Montrer que $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux.

c) Montrer que $\|x+y\|^2=\|x-y\|^2+4(x/y)$.

2) Soient $(x,y,z)\in E^3$ tel que $(x/y)=(x/z)$. Les assertions suivantes sont-elles Vraies ou Fausses. Justifier vos réponses.
a) $y=z$ b) $x=0$ c) x et $y-z$ sont orthogonaux.
3) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique trouver un vecteur non nul orthogonal à $x=(2,0,1)$. Déterminer l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à $x=(1,1,1)$. Est-il un espace vectoriel? Si oui, quelle est sa dimension?

Exercice 3

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou Fausses. Justifier.

1) Si $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_r$ sont des valeurs propres distinctes de A et $v_1, \ldots\ldots, v_r$ sont leurs vecteurs propres respectivement associés alors la famille $(v_1, \ldots\ldots, v_r)$ est linéairement dépendante.

2) La matrice A est diagonalisable si et seulement si A possede n valeurs propres distinctes.
3) Une condition suffisante pour que A soit diagonalisablé est:
a) A possède n vecteurs propres
b) A possede n vecteurs propres distincts.
c) A possede n vecteurs propres linéairement indépendants.
4) Si A est diagonalisable alors A est inversible.
5) Si A est inversible alors A est diagonalisable.
6) Si 0 est valeur propre de A alors $rg(A) < n$.
7) Si $P \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $Sp(A) \subset Sp(PAP^{-1})$ (inclusion stricte).
8) Existe t-il une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable non diagonale ayant une seule valeur propre?
9) Montrer que A et sa transposée A^T ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 4 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

a) M est-elle diagonalisable? Justifier votre réponse.

b) Démontrer que M est trigonalisable.

c) Trigonaliser M .

Exercice 5

Calculer le rang de la famille $F = (x_1, x_2, x_3)$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$ dans les cas suivants:

1) $x_1 = (1,1,0)$, $x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (0,1,1)$.

2) $x_1 = (2,1,1)$, $x_2 = (1,2,1)$ et $x_3 = (1,1,2)$.

3) $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (1,0,3)$ et $x_3 = (1,1,2)$.

Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2013-2014

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algebre 2 - DS2-Agadir le 10/06/2014-Durée: 2h:00mn

Exercice 1

1) La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable? M est-elle trigonalisable?

Justifier vos réponses sans faire de calcul.

2) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. 1) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A .

2) La matrice A est-elle diagonalisable? Justifier.

3) Démontrer que A est trigonalisable. La trigonaliser.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans sa base canonique, est

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1) f est-il trigonalisable? Justifier.

2) Montrer que l'espace propre de f associé à 1 est $E_1(f) = vect(u)$ avec $u = (1,1,0)$.

3) Soit $v = (0,0,1)$, calculer $f(v)$ en fonction de u et v.

4) Déterminer le sous espace propre de f associé à 2, $E_2(f)$.

5) Soit $w = (1,0,1)$, montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice T de f dans cette nouvelle base.

6) Calculer $f^n(v)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire T^n pour $n \in \mathbb{N}$.

7) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère le produit scalaire canonique.

a) Vérifier que les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,-3)$ et $v_3 = (5,-4,-1)$ sont deux à deux orthogonaux. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer les vecteurs unitaires orthogonaux à la fois aux vecteurs $v_1 - v_2$ et $v_1 + v_3$

c) Montrer que les vecteurs $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, en déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Université Ibnou Zohr
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de mathématiques
Agadir

Année Universitaire 2013-2014

Pr. Lahcen TAOUFIQ

ENSA1 Algèbre 2 - DS1 - Agadir le 09/04/2014 - Durée 2h00m

Exercice 1

Parmi les expressions ci-dessous, déterminer celle qui définissent une forme bilinéaire sur le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel E indiqué.

1) $f_1((u,v)) = -1$ et $E = \mathbb{R}^2$.
2) $f_2((u,v)) = 2u_1v_1 - 4u_2v_2 + 3u_1v_2$ et $E = \mathbb{R}^2$.
3) $f_3((u,v)) = 2u_1v_1 + 5u_2v_2 + 3{v_3}^2{u_3}^2$ et $E = \mathbb{R}^4$.
4) $f_4((u,v)) = 0$ et $E = \mathbb{R}^2$.
5) $f_5((u,v)) = 2u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2 + u_2v_1$ et $E = \mathbb{R}^2$.
6) $f_6((u,v)) = 2u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2 - u_2v_1$ et $E = \mathbb{R}^2$.
7) $f_7((u,v)) = u_1v_1 - 3u_2v_2 + u_3v_3$ et $E = \mathbb{R}^3$.
8) $f_8((u,v)) = u_1u_2 - v_1v_2$ et $E = \mathbb{R}^2$.
9) $f_9((u,v)) = u_1u_2 + v_1v_2$ et $E = \mathbb{R}^2$.
10) $f_{10}((u,v)) = u_1v_2 - 3u_2v_3 - u_2v_1 + 3u_3v_2$ et $E = \mathbb{R}^3$.

Quelles formes bilinéaires sont symétriques, antisymétriques, alternées (Dresser un tableau).

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul et $A = (a_{i,j})_{0\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que detB = detA où $B = (b_{i,j})_{0\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ est telle que $b_{i,j} = a_{n+1-j,n+1-i}$.

2) Calculer le déterminant de la matrice A dans les cas suivants:

a) $a_{i,j} = {x_n}^{n+i-j}$ $\forall$ i, j $\in \{1, \ldots \ldots \ldots n\}$ avec $x_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

b) $a_{i,j} = j^{i-1}$ $\forall$ i, j $\in \{1, \ldots \ldots \ldots n\}$.

c) $a_{i,i} = -1$ $\forall$ i $\in \{1 \ldots \ldots n\}$ et $a_{i,j} = x$ $\forall$ i $\neq$ j $\in \{1 \ldots \ldots n\}$ où x est fixé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1) En considérant l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par $f_4(X) = A_4X$, montrer que A_4 est inversible et calculer ${A_4}^{-1}$.

2) Retrouver ce résultat par la méthode du déterminant.

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $A_n = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,i} = 1, a_{i,i+1} = -1 \ \forall i \in \{1 \dots\dots n\}$ et tous les autres coefficients etant nuls.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ défini par $f_n(X) = A_n X$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on note $f_n(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y$.

Exprimer y_1, y_2 ,.....et y_n puis $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ et $-y_1 - y_2 - \cdots - y_{i-1} + y_i + \cdots + y_n$ pour tout $i \in \{2 \dots\dots n\}$ en fonction de x_1, x_2,........et x_n.

En déduire que A_n est inversible et calculer A_n^{-1}. $AX = Y$

$A^{-1} = \frac{1}{Y}$

Exercice 4

1) Calculer les rangs des matrices suivantes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & r^4 & r^3 & r^2 & r \\ r & 1 & r^4 & r^3 & r^2 \\ r^2 & r & 1 & r^4 & r^3 \\ r^3 & r^2 & r & 1 & r^4 \\ r^4 & r^3 & r^2 & r & 1 \end{pmatrix}$ où $r = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

2) Calculer les rangs des endomorphismes suivants:

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que: $f(x,y,z) = (x - y, y - z, z - x)$.

b) $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par: $f(x,y,z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$.

c) $h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tel que $h(x,y,z,t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, 2y - x + z)$.

Exercice 5

Soit (S) le système linéaire :

$$(S) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + 1y + 2z + 3t = 14 \end{cases}$$

21

1) Résoudre (S) par la méthode de Gauss.
2) Résoudre (S) par la méthode de Cramer.

Devoir Surveillé N°2 - Algèbre 2 (durée : 2h)

Exercice 1

On considere la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

1 – Diagonaliser A

2 - Calculer $(A)^n$ en fonction de n

3 - (u_n) ; (v_n) et (w_n) designent trois suites reelles verifiant : $u_{n+1} = -4u_n - 6v_n$; $v_{n+1} = 3u_n + 5v_n$; $w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n$ avec $u_0 = v_0 = w_0 = 1$

En considerant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$; Calculer X_{n+1} en fonction de X_n et deduire u_n ; v_n et w_n en fonction de n

Exercice 2

On considere la matrice $M = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

1 – La matrice M est elle diagonalisable

2 - Detrminer une matrice inversible P telle que: $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 3

IR[X] désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels

Déterminer les valeurs vecteurs propres de l'endomorphisme : f définie de IR[X] vers IR[X] par :

f(P) =P(X+1) - P' (P' est le polynôme dérivé de P)

Exercice 4

On considere la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(IR)$ $(b \neq 0)$

1 – Determiner le rang de la matrice : $A - (a - b)I_n$ et deduire que $\lambda = a - b$ est une valeur propre de A de multiplicité : n - 1

2 - En considerant la trace donner l'autre valeur propre de A.

3 - Deduire le determinant de A.

Université Ibn Zohr
ENSA Agadir

2012/2013
Cycle classes preparatoires

Devoir Surveillé N°1 Algebre2

Exercice1

On pose : $a = \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $b = \cos(\frac{4\pi}{5})$

1 – Factorisez dans C[X] le polynome $X^5 - 1$

2 – Justifier alors l'egalité : $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 - 2aX + 1)(X^2 - 2bX + 1)$

3 – Montrez que a et b sont solutions d'un systeme de deux equations puis resolvez ce systeme.

4 - Determinez : $\cos(\frac{2\pi}{5})$; $\cos(\frac{\pi}{5})$ et $\cos(\frac{\pi}{10})$.

On pose pour $q \geq 1$ $\quad A(q) = \prod_{1\leq k\leq 2q} \text{cotan}(\frac{k\pi}{2q+1})$ et $B(q) = \prod_{1\leq k\leq q} \tan(\frac{k\pi}{2q+1})$

5 - Determinez les valeurs de B(1) et B(2)

On note $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$. Pour $0 \leq k \leq n-1$ On pose $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

6 – Ecrire selon les puissances croissantes les polynomes : $P_1; P_2; P_3;$ et P_4

7 – Determinez les racines de P_n

8 – Decomposez P_n en facteurs irreductibles dans C[X]

9 - Donner une expression tres simple de A(q) et B(q)

Exercice 2

1 - Determiner D = le pgcd des polynomes $A = X^5 + X^4 + X^3 + 1$ et $B = X^4 + 1$

2 - Determiner U et V tels que $AU + BV = D$

Exercice 3

a , b et c désignent les racines du polynome $P = X^3 - 3X - 1$.

1 – Calculez $R = a^2 + b^2 + c^2$; $S = a^3 + b^3 + c^3$ et $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

2 – Calculez $U = \frac{1}{(a^3-1)^2} + \frac{1}{(b^3-1)^2} + \frac{1}{(c^3-1)^2}$

Exercice 4

Decomposer dans C(X) les fractions rationnelles :

a – $\quad F = \dfrac{X^5 - 2X^4 + 4X^2 - 5X + 1}{X^3 - 2X^2 + X}$

b – $\quad G = \dfrac{1}{X^n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

UNIVERSITE IBN ZOHR

ENSA Agadir

2011/2012

Cycle Préparatoire – 1ère Année

Devoir Surveillé N° 2– Algèbre 2 – 08/06/2012 (durée 2h)

Exercice 1

Pour quelles valeurs de a et b la matrice $M(a,b)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & b & b^2 & b^3\\ 0 & 1 & 2a & 3a^2\\ 0 & 1 & 2b & 3b^2\end{pmatrix}$ est inversible ?

$PD = AP$

$D = P^{-1}AP$

$A = PDP^{-1}$

Exercice 2

On considere le déterminant d'ordre n : $\Delta(a,b,c)=\begin{vmatrix} a & c & \cdots & c\\ b & a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & c\\ b & \cdots & b & a\end{vmatrix}$

pour x dans IR on pose $P(x) = \Delta(a+x, b+x, c+x)$

1-Montrer que P(x) est une fonction polynomiale de degré ≤ 1

2-Calculer P(-b) et P(-c) et deduire $\Delta(a,b,c)$ dans le cas ou $b \neq c$

3-Calculer $\Delta(a,b,c)$ dans le cas $b = c$

(on pourra remplacer la premiere colonne par la somme de toutes les colonnes)

Exercice 3

On considere le systeme des suites suivant:

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - v_n - \frac{1}{2}w_n \\ w_{n+1} = v_n - w_n \end{cases} \quad \text{avec } u_0 = 1 \text{ ; } v_0 = -1 \text{ ; } w_0 = 2$$

A ce systeme , On associe la matrice $M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

1 – *Determiner* les valeurs propres de M

2-La matrice M est -elle diagonalisable , trigonalisable , justifier votre réponse

3-Donner une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP = T$ avec:

$$T = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$(M - Id)^2$

–*Calculer* P^{-1}

– *Determiner* T^n pour tout n dans IN

– *En* déduire l'expression de chacune des suites (u_n) ; (v_n) et (w_n)

Université Ibn Zohr

ENSA Agadir

2011 /2012

Cycle préparatoire 1^{ere} année

DS N°1 – Algèbre 2

Exercice 1

On considere la suite (T_n) de polynomes dans $IR[X]$ définie par : $T_0 = 1$; $T_1 = X$ et pour tout n dans IN :
$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$

1)Determiner T_2 ; T_3 et T_4

2)Montrer que pour tout θ dans IR et n dans IN : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

3)Donner le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.

4)Etudier la parité de T_n

5)Donner les racines de T_n

Exercice 2

$n \in IN^*$; $P_n(X) = X^{2n} - 1$

Décomposer dans C[X] puis dans IR[X] le polynome P_n

Exercice 3

1) Soit $Q(X) = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^3 + 2X^2 - X$

a)Donner une racine evidente de Q

b)Montrer que 1 est une racibe de Q et preciser sa multiplicité.

c)Factoriser Q en polynomes irreductibles dans IR[X] puis dans C[X]

2)On pose $P(X) = 2X + 1$ et $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$

a)Donner la partie entiere de F

b)Preciser les poles de F ainsi que leur multiplicités

c)Donner la décomposition en élements simples de F dans C(X).

d) Deduire la décomposition de F dans IR(X)

Exercice 4

Résoudre dans C^3 le systeme $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -1 \end{cases}$

UNIVERSITE IBN ZOHR 2010/2011

ENSA Agadir

Cycle Préparatoire – 1ère Année

Rattrapage – Algèbre – 15/06/2011

Durée 2h

Exercice1

Determiner les polynomes P dans IR[X] tels que : $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$

(Donner d'abord une condition necessaire sur les degrés)

Exercice 2

Soient n dans IN et θ dans IR

Determiner le reste de la division euclidienne de $(X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par $(X^2+1)^2$

Exercice 3

Décomposer en elements simples la fraction rationnelle :

$$F(X)=\frac{1}{X^3(X^3+1)}$$

Exercice 4

On considere la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1 – Donner le polynome caractéristique de A

2-Déterminer les vecteurs propres de A et endéduire une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

3- Soit $n \in IN$ Donner A^n

4-Donner trois suites $(u_n);(v_n)$ et (w_n) telles que : $u_{n+1} = 2u_n + w_n$; $v_{n+1} = u_n + v_n + w_n$ et $w_{n+1} = -2u_n - w_n$

Exercice 5

Soit : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(IR)$

– La matrice A est t elle diagonalisable?

- Donner une matrice P inversible telle que : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Université Ibn Zohr
ENSA Agadir

2010/2011
Cycle préparatoire 1ère Année

Devoir Surveillé N°2 - Algèbre 2

Exercice1

On considere la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$

1°) Montrer que A est diagonalisable.

2°) Donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $P^{-1}AP = D$

3°) Déduire A^n pour n dans IN.

4°) On définit la suite réelle (u_n) par : $u_0 = a$; $u_1 = b$; $u_2 = c$ et pour tout n:

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \text{ et soit } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

a°) Trouver une relation entre X_{n+1} ; X_n et A

b°) Deduire l'expression de u_n en fonction de n et a , b , c .

Exercice2

On considere l'endomorphisme f canoniquement associé a la matrice : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1°) Montrer que A trigonalisable ; est - t -elle diagonalisable ?.

2°) Donner une base $\beta = (w_1 , w_2 , w_3)$ telle que la matrice de f dans cette base est :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice3

$a_1 , a_2 ,....., a_n$ sont des réels distinxts deux à deux.

pour $1 \le i \le n$, On pose $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ (polynomes d'intrpolation de Lagrange en : $a_1 , a_2 ,....,$

$\beta_1 = (1, X, X^2, ..., X^{n-1})$; $\beta_2 = (L_1, L_2, ..., L_n)$

1°) Calculer $L_i(a_k)$ pour $1 \le i,k \le n$

2°)Endeduire que β_2 est une base de $IR_{n-1}[X]$

3°) Montrer que $\forall$ P $\in$ $IR_{n-1}[X]$; $P(X) = \sum_{k=1}^{k=n} P(a_k) L_k(X)$

4°)*Donner* la matrice V de passage de la base β_2 à la base β_1 et donner son déterminant.

Université Ibn Zohr
ENSA Agadir

Année scolaire 2010 /2011
1^{ere} **année tronc commun**

Devoir Surveillé N°1 Algèbre - 12 Avril 2011

(Durée 2h)

Exercice1

Trouver tous les polynomes P de IR[X] vérifiant :

$(P')^2 = 4P$ (P' désigne le polynome dérivé de P)

(Considerer le degré de P)

Exercice2

On considere le polynome P défini par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{X^k}{k!} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Montrer que le polynome P ne possede pas de racines multiples.

Exercice3

On considere la suite de polynomes (T_n) définie par :

$T_0 = 1$; $T_1 = 2X$ et pour n dans IN : $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$

1 – Calculer T_2 et T_3

2 – a°) Montrer que $\deg(T_n) = n$; Determiner le coefficient dominant

b°)Etablir que si n est pair (resp impair) T_n est pair (resp impair)

3 - Calculer pour tout n de IN $T_n(1)$

4 – Soit $\theta \in]0, \pi[$

a°)Montrer que pour tout n dans IN $T_n(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$

b°)Etablir que pour tout n dans IN :

T_n possede n racines réelles, toutes situées dans $]-1, 1[$ que l'on explicitera

c°)Deduire que pour tout n dans IN : $T_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^{k=n} \left(X - \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right)$

d°)Deduire que pour tout n dans IN , la valeur de : $\prod_{k=1}^{k=n} \sin\left(\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)$

Exercice4

Décomposer en eléments simples dans IR(X) les fractions rationnelles suivantes :

1°) $F(X) = \dfrac{1}{X^n(X+2)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

2°) $G(X) = \dfrac{1}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$

Université Ibn Zohr
Ecole Nationale des Science Appliquées
Agadir

Année universitaire 2009/2010
durée 2 heures

ENSA 1.

Contrôle d'Algebre(DS4).

Exercice I.

Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.

Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application.

Montrer si $\forall (x, y) \in E^2 \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ alors f est linéaire.

Exercice II.

On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire et

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

(1) Préciser une base orthonormale de F.

(2) Déterminer $F^\perp$. Préciser une base orthonormale de $F^\perp$.

(3) Donner l'expression de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un élément $x \in \mathbb{R}^3$ sur F. Préciser les images par $p_F(x)$ des vecteurs de la base.

(4) Calculer $d(x, F)$.

(5) Ecrire la matrice de la symetrie orthogonale s_F par rapport à F. Quelle est dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la symetrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.

Exercice III.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$