$\int |\psi|^2 \, d^3r$: finie.

↳ fonctions de carré sommable.

↳ $\mathcal{L}^2$ est un espace des fonctions de carré sommable.
: Hilbert de dimension infini.

$\mathcal{E}$: espace des états :

$\psi_1(x) \in \mathcal{E}$

$\psi_2(x) \in \mathcal{E}$

$\lambda \psi_1 + \mu \psi_2 \in \mathcal{E}$.

• produit scalaire :

$$(\Phi, \psi) = \int \Phi^* \cdot \psi \, dx = \lambda$$

$$(\psi, \Phi) = \int \psi^* \, \Phi \, dx = \lambda^*$$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.

$\sqrt{\vec{v}^2} = \|v\|$

$\langle \Phi |$ $\quad | \psi \rangle$.

$$\langle \Phi | \psi \rangle = \int \Phi^* \cdot \psi \, dx.$$

$\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$: norme $|\psi\rangle$.

$\mathcal{E} = \{ u_i(x) \}$

$$\psi(x) = \sum_i c_i \, u_i(x)$$

* orthogonalisation :

• $\langle u_i | u_j \rangle = \int u_i^* \cdot u_j \, dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 : i = j \\ 0 : i \neq j \end{cases}$ $\quad$ $(\vec{i} \cdot \vec{i} =$

$= \delta(x - x')$

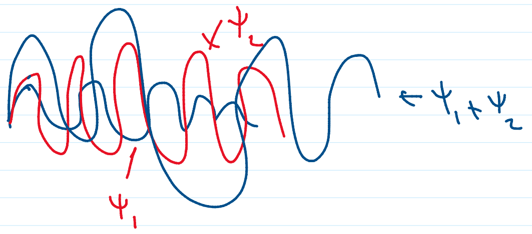
• $|\psi\rangle = \sum c_i |u_i\rangle$

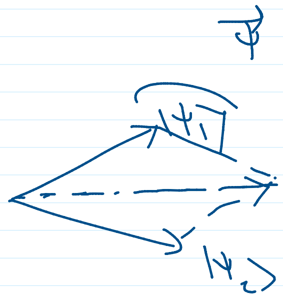
* relation de Fermeture :

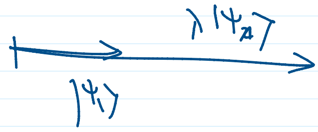
$$\int |u_i\rangle \langle u_i| = \mathbb{1}.$$

$$\sum |u_i\rangle \langle u_i| = \mathbb{1}$$

$\psi(x) \in \mathbb{C}$.







$\underset{\text{Matrice}}{\underset{\sim}{H}}|\psi\rangle = \underset{\sim}{E}|\psi\rangle$

$\| \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\vec{v}}} = a_i \cdot \vec{v} \|$

* $\mathcal{E} = \{ |u_i\rangle_{i=1,\dots,n} \}$

* $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \underline{c_i} |u_i\rangle$.

$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i$

* $\underset{\sim}{|\psi\rangle} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

* $\langle\varphi| \in \mathcal{E}^*$ (dual).

$\langle\varphi|\psi\rangle = \int \varphi^* . \psi \, dx$.

$\langle\varphi| = (b_1 \; b_2 \; b_3 \dots b_n)$

$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \rightarrow \langle\psi| = (c_1^* \; c_2^* \; c_3^* \dots\dots c_n^*)$

$\|\psi\| = \langle\psi|\psi\rangle = (c_1^* \; c_2^* \dots c_n^*) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + \dots + |c_n|^2$

Operateur lineaire : (Matrice)

$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle$

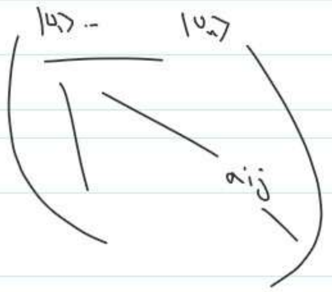
$|\psi'\rangle \quad A|\psi\rangle$

$$|\psi'\rangle = A.|\psi\rangle$$

$$A\left(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle\right) = \lambda_1 A|\psi_1\rangle + \lambda_2 A|\psi_2\rangle$$

$$AB\,|\psi\rangle \neq BA.|\psi\rangle \qquad \|BA \neq AB\| \text{ en générale.}$$

- $[A,B] = AB - BA.$ $\qquad [A,B] = 0$: A et B sont Commutatif.
- $[A, B+C] = [A,B] + [A,C].$
- $[A, B.C] = [A,B].C + B.[A,C]$

A 

$$a_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle.$$

$$A\,|\psi\rangle = A.\sum c_i |u_i\rangle = \sum c_i\, A.|u_i\rangle.$$

* vecteur et valeur propres :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{A} . \underbrace{f(x)}_{|\psi\rangle}$$

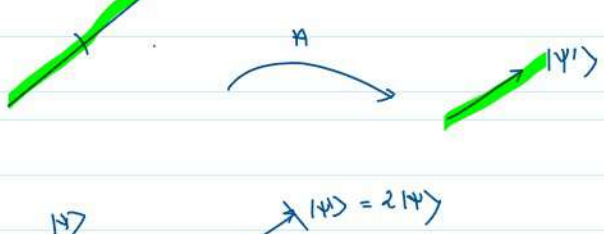
$$\frac{\partial}{\partial x} . e^{ax} = a . e^{ax}$$

fonction propre

val. propre.

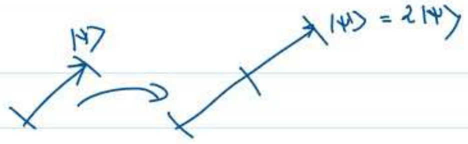
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ax^2}\right) = 2\,a\,x . e^{ax^2}$$

e^{ax^2} n'est pas fonction propre de A.



$$A.|\psi\rangle = |\psi'\rangle = \frac{1}{2}|\psi\rangle.$$

$$A\,\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{u}$$



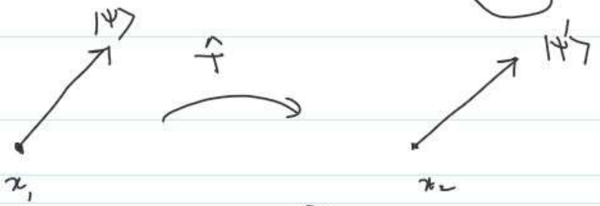
Vect. propre.

$$A\,|\psi\rangle = a\,.\,|\psi\rangle \quad : \quad \text{E.V.P.}$$

Val. propre

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$:

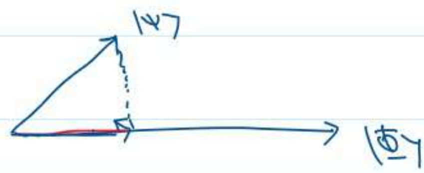
$$R(\theta)\,|\psi\rangle = |\psi'\rangle \neq a\,.\,|\psi\rangle .$$



$$\hat{T}\,|\psi\rangle = |\psi'\rangle = 1.|\psi\rangle$$

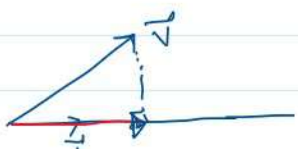
* Projecteur :

$$\hat{P}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\phi\rangle .$$



$$\hat{P} = |\phi\rangle\langle\phi| .$$

$$\hat{P}\,|\psi\rangle = |\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle = \lambda\,|\phi\rangle .$$



$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} .$$
$$= (\vec{v}.\vec{i})\,\vec{i} + (\vec{v}.\vec{j})\,\vec{j} .$$

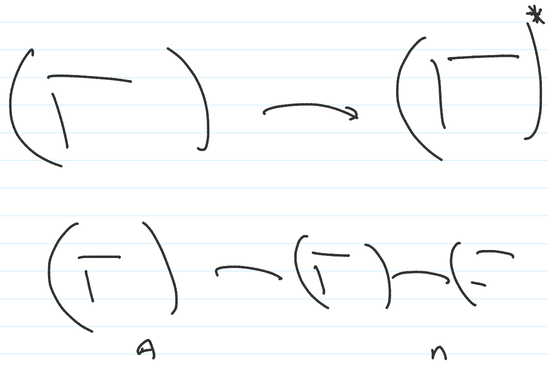
$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad \langle\phi| = \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix}$$

$$\| \; \hat{P} = |\phi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 \end{pmatrix}$$

$(2,1)\ (1,2) \qquad (2\times 2)$

• Opérateurs adjoints: $A \rightarrow \underset{\sim}{A}^{\dagger}$

- **Operateurs adjoints:** $A \rightsquigarrow A^{\dagger}$



$$\Rightarrow \langle u_i | A^{\dagger} | u_j \rangle = \left(\langle u_j | A | u_i \rangle \right)^*$$

$$(A^{\dagger})^{\dagger} = A$$

$$(A+B)^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger}$$

$$(\lambda A)^{\dagger} = \lambda^* . A^{\dagger}$$

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}$$

- **Operateurs hermitiques:**

$A = A^{\dagger}$: A: operateur hermitique.

$$A = A^{\dagger} \Rightarrow A_{ij} = A^*_{ji}$$

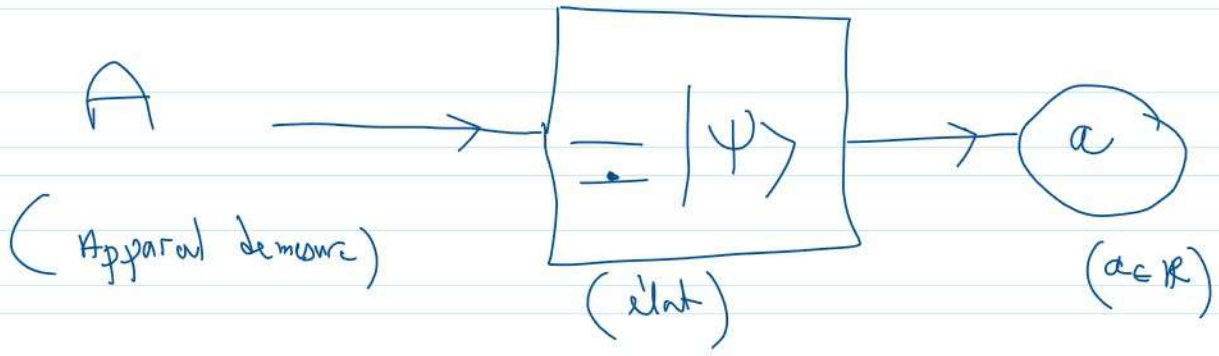
$$P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad P^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ +i & 1 \end{pmatrix} \sim P^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$P = P^{\dagger}$: P: hermitique:

1) Val. propr. d'un operateur hermitique sont réel".

A (mesure physique) $(A = A^{\dagger})$

a (resultats physiques) $\in \mathbb{R}$.



$$P(a) = |\langle u_i|\psi\rangle|^2$$

Exercice1/

On considère un système physique dont l'espace des états est à trois dimensions et rapporté à la base orthonormée formée par $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Dans la base de ces trois vecteurs, l'hamiltonien H du système et l'observable A sont donnés par :

$$H = \hbar\omega_0\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad A = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

a et ω_0 sont des constantes réelles.

Le système à l'instant t = 0 est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

1) On mesure, à l'instant t = 0, l'énergie du système, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

- Calculer pour le système dans l'état $|\psi(0)\rangle$ l'écart quadratique moyen ΔH.

2) A t=0 on mesure H, on trouve $2\hbar\omega_0$, quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure?

3) Au lieu de mesurer H à l'instant t = 0, on mesure A, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités?

Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?

4) Calculer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ du système à l'instant t.

5) Quels résultats obtient-on si l'on mesure à l'instant t l'observable A ? Interprétation ?

$$\mathcal{E} = \{|u_1\rangle\ |u_2\rangle\ |u_3\rangle\}.$$

$$\langle u_1|u_1\rangle = 1$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{2}}\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

1) les résultats de mesure d'énergie = les val. propres de H.

$$\boxed{\det(A - \lambda\cdot\mathbb{1}) = 0.}$$

$$\left|\begin{pmatrix}\hbar\omega_0 & 0 & 0\\0 & 2\hbar\omega_0 & 0\\0 & 0 & 2\hbar\omega_0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|$$

$$\begin{vmatrix}\hbar\omega - \lambda & 0 & 0\\0 & 2\hbar\omega_0 - \lambda & 0\\0 & 0 & 2\hbar\omega_0 - \lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$(\hbar\omega_0 - \lambda)\begin{vmatrix}2\hbar\omega - \lambda & 0\\0 & 2\hbar\omega - \lambda\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{vmatrix} = 0$$

$$(\hbar\omega_0 - \lambda)(2\hbar\omega - \lambda)^2 = 0$$

$$\left\{\begin{matrix}\lambda_1 = \hbar\omega_0\\ \lambda_2 = 2\hbar\omega.\end{matrix}\right)$$ val. propres de H

$= \{$ Resultat de l'energie possible $\}$.

Resultat possible de l'energie $= \{\hbar\omega_0,\ 2\hbar\omega_0\}$.

$$P(\hbar\omega_0) = |\langle u_1|\psi(0)\rangle|^2 = \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\underline{H} = \begin{array}{c|ccc} & |u_1\rangle & |u_2\rangle & |u_3\rangle \\ \hline \langle u_1| & \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ \langle u_2| & 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ \langle u_3| & 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{array}$$

$H|u_1\rangle = \hbar\omega_0\,|u_1\rangle$: $|u_1\rangle$: vect propre de H. $\hbar\omega_0$.

$H|u_2\rangle = 2\hbar\omega\,|u_2\rangle$ $|u_2\rangle$: vect propre de H $2\hbar\omega$

$H|u_3\rangle = 2\hbar\omega\,|u_3\rangle$ $|u_3\rangle$ vect " " " 2 fois degeneré

$$P(2\hbar\omega_0) = |\langle u_2|\psi(0)\rangle|^2 + |\langle u_3|\psi(0)\rangle|^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\| P(2\hbar\omega_0) = \frac{1}{2} \|$$

$$(\Delta X)^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$$

def. $(\Delta H)^2 = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2$

$$\langle H\rangle_{|\psi(0)\rangle} = \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle \;\checkmark = \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\hbar\omega_0 & 0 & 0\\ 0 & 2\hbar & 0\\ 0 & & 2\hbar\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2\end{pmatrix}$$

$$\langle H\rangle = \sum E_i \cdot P(E_i) \quad \checkmark$$

$$= \hbar\omega \cdot P(\hbar\omega) + 2\hbar\omega \cdot P(2\hbar\omega).$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega + 2\hbar\omega \cancel{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{?}{2}\hbar\omega}$$

$$\langle \underline{\underline{H^2}} \rangle = \langle \psi(0) | \underline{\underline{H^2}} | \psi(0) \rangle$$

$$H^2 = H \cdot \underline{H} = (\hbar\omega_0)^2 \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} (\hbar\omega)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4(\hbar\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 4(\hbar\omega) \end{pmatrix}$$

$$\langle H^2 \rangle = \sum E_i^2 \cdot P(E_i^2)$$

$$= (\hbar\omega_0)^2 P((\hbar\omega)^2) + \quad 4(\hbar\omega)^2 \, P(4(\hbar\omega)^2)$$

$$\| \Delta H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \|$$