3.1 : l'hamiltonien :

$$H_x = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

On pose : $\begin{cases} \hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \\ \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} \cdot p \end{cases}$ $\qquad H = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot (\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$.

$$\hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2} \cdot (\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$$

$* \ [\hat{X}, \hat{P}] = \frac{1}{\hbar} \cdot [X, P] = i \cdot \mathbb{1}.$

$H |\varepsilon\rangle = E_n |\varepsilon\rangle \qquad |\varepsilon\rangle : E_n.$

$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\hat{X} + i\hat{P}) & : \text{création} \\ a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}) & \text{annihilation} \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} \hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^+) \\ \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - a^+). \end{cases}$

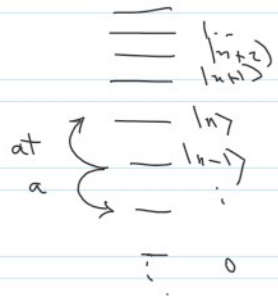
$N = a^+ a \qquad (N^+ = N)$

$\hat{H} = N + \frac{1}{2} Id.$

$a|n\rangle = \sqrt{n} \cdot |n-1\rangle \qquad a|0\rangle = 0|0\rangle.$

$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle.$

$N|n\rangle = n|n\rangle.$



$=$

$=$

1. $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \qquad \hat{U} = \exp\left(-i \frac{\hat{H}(t - t_0)}{\hbar}\right).$

$t_0 = 0 : \ |\psi(t)\rangle = \exp\left(-i \frac{\hat{H}t}{\hbar}\right) \cdot \sum_n c_n |\varphi_n\rangle$

$$= \sum c_n \cdot \exp\left(-i \frac{\hat{H}t}{\hbar}\right) |\varphi_n\rangle$$

$\hat{H} |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle$

$f(\hat{H}) |\varphi_n\rangle = f(E_n) |\varphi_n\rangle$

$\exp\left(-i \frac{\hat{H}t}{\hbar}\right) |\varphi_n\rangle = \exp\left(-i \frac{E_n t}{\hbar}\right) \cdot |\varphi_n\rangle$

$|\psi(t)\rangle = \sum c_n \cdot \exp\left(-i \frac{E_n t}{\hbar}\right) |\varphi_n\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \sum c_n \cdot \exp\left(-i\frac{E_n t}{\hbar}\right)|\varphi_n\rangle$$

$$= \sum_n c_n \cdot \exp\left(-i\frac{\hbar\omega(n+1/2)}{\hbar}\right)|\varphi_n\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n \exp(-i\omega(n+1/2)t)\,|\varphi_n\rangle$$

$=$

$\exists (E_n > 2\hbar\omega)$

$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ $\quad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega.$ $\quad E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega. \geq 2\hbar\omega.$

$\underbrace{\sum P = 1}$ $\iff$ $P(E_n > 2\hbar\omega) + P(E_n \leq 2\hbar\omega) = 1$

$\iff$ $P(E_n > 2\hbar\omega) = 1 - P(E_n \leq 2\hbar\omega)$

$P(E_n \leq 2\hbar\omega) = \underset{(n=0)}{P(E_0)} + \underset{(n=1)}{P(E_1)} = |c_0|^2 + |c_1|^2.$

$P(E_n > 2\hbar\omega) = 1 - |c_0|^2 - |c_1|^2.$ ✓

$$\begin{cases} |c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2 = 1 \\ P(\underline{E_n} > 2\hbar\omega) = |c_2|^2 + |c_3|^2 + \dots + |c_n|^2 \ ✓ \end{cases}$$

$P(E_n > 2\hbar\omega) = 0 = |c_2|^2 + |c_3|^2 + \dots + |c_n|^2$

$\| c_2 = c_3 = c_4 = \dots = c_n = 0 \|.$

$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$

a) $\langle x\rangle_{|\psi(t)\rangle} = \langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cdot\langle\psi(t)|(a+a^+)|\psi(t)\rangle$

$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle a\rangle + \langle a^+\rangle)$

* $\langle a\rangle = \langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle$

$a|\psi(t)\rangle = a(c_0|\varphi_0\rangle + c_1|\varphi_1\rangle)$

$= c_0\, a|\varphi_0\rangle + c_1\, a|\varphi_1\rangle$ $\qquad a|0\rangle = 0|0\rangle.$

$= c_0 \cdot 0 + c_1|\varphi_0\rangle.$ $\qquad a|1\rangle = \sqrt{1}|0\rangle$

$\langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle = (c_0^*\langle\varphi_0| + c_1^*\langle\varphi_1|)\, c_1|\varphi_0\rangle$

$= c_0^* c_1$

* $\langle a^+\rangle = \langle\psi(t)|a^+|\psi(t)\rangle.$

$a^+|\psi(t)\rangle = a^+.(c_0|\varphi_0\rangle + c_1|\varphi_1\rangle)$

$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ $\qquad = c_0\, a^+|\varphi_0\rangle + c_1\, a^+|\varphi_1\rangle.$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad = c_0\, a^+|\varphi_0\rangle + c_1\, a^+|\varphi_1\rangle.$$

$$= c_0 \sqrt{1}\,|\varphi_1\rangle + c_1\sqrt{2}\,|\varphi_2\rangle$$

$$\langle\psi(0)|\, a^+|\psi(0)\rangle = \left(c_0^* \langle\varphi_0| + c_1^* \langle\varphi_1|\right)\left(c_0|\varphi_1\rangle + c_1\sqrt{2}|\varphi_2\rangle\right)$$

$$= c_1^*\, c_0.$$

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(c_0^* c_1 + c_1^* c_0\right)$$

$$\langle p\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\langle a^+\rangle - \langle a\rangle\right)$$

$$\langle p\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(c_1^* c_0 - c_0^* c_1\right).$$

$$* \qquad x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\cdot(a+a^+)^2$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + a^{+2} + a a^+ + a^+ a\right)$$

$$[a, a^+] = 1 \Rightarrow a a^+ - a^+ a = 1$$

$$a a^+ = 1 + a^+ a.$$

$$\| a a^+ = N + 1 \|.$$

$$a a^+ + a^+ a = 2N + 1$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + a^{+2} + 2N + 1\right).$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle a^2\rangle + \langle a^{+2}\rangle + 2\langle N\rangle + 1\right).$$

$$\langle a^2\rangle = 0$$

$$\langle a^{+2}\rangle = \langle\psi(0)|\, a^{+2}|\psi(0)\rangle$$

$$a^+ a^+ |\psi(0)\rangle = a^+ a^+\left(c_0|\varphi_0\rangle + c_1|\varphi_1\rangle\right)$$

$$= a^+\left(c_0 |\varphi_1\rangle + c_1\sqrt{2}|\varphi_2\rangle\right)$$

$$a^{+2}|\psi(0)\rangle = c_0\sqrt{2}\,|\varphi_2\rangle + c_1\sqrt{2}\sqrt{3}\,|\varphi_3\rangle.$$

$$\langle\psi(0)|a^{+2}|\psi(0)\rangle = \left(c_0^*\langle\varphi_0| + c_1^*\langle\varphi_1|\right)\left(\cancel{\quad}\right)$$

$$= 0.$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle$$

$$\langle 2N+1\rangle_{|\psi(0)\rangle}\ ??$$

$$N|0\rangle = 0|0\rangle$$

$$(2N+1)|\psi(0)\rangle = 2N|\psi(0)\rangle + 1\cdot|\psi(0)\rangle$$
$$= 2\underline{\underline{N}}\left(c_0|\underline{\underline{\varphi_0}}\rangle + c_1|\varphi_1\rangle\right)$$
$$+ \; c_0|\varphi_0\rangle + c_1|\varphi_1\rangle$$

$$= 2\cdot c_1 \; |\varphi_1\rangle + c_0|\varphi_0\rangle + c_1|\varphi_1\rangle$$
$$= c_0|\varphi_0\rangle + 3c_1|\varphi_1\rangle$$
$$\langle\psi(0)|\,2N+1\,|\psi(0)\rangle = \left(c_0^*\langle\varphi_0| + c_1^*\langle\varphi_1|\right)\left(c_0|\varphi_0\rangle + 3c_1|\varphi_1\rangle\right)$$
$$= |c_0|^2 + 3|c_1|^2$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\cdot\left(|c_0|^2 + 3|c_1|^2\right)$$

$$* \quad p^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}\left(a^+ - a\right)^2$$
$$p^2 = -m\omega\frac{\hbar}{2}\cdot\left(a^{+2} + a^2 - aa^+ - a^+a\right)$$
$$\langle p^2\rangle = -m\omega\frac{\hbar}{2}\left(\underset{0}{\underset{\parallel}{\langle a^{+2}\rangle}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{\langle a^2\rangle}} - (2N+1)\right)$$
$$\left\|\, \langle p^2\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}\left(|c_0|^2 + 3|c_1|^2\right) \right\|$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$
$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$$

b) $\langle H\rangle = \langle\psi(0)|\,\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\,|\psi(0)\rangle$

$$\langle H\rangle = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle$$

$$\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1 = |c_0|^2 + |c_1|^2 \quad \checkmark$$

$$\langle H\rangle = \frac{\hbar\cancel{\omega}}{2}\cdot\left(|c_0|^2 + 3|c_1|^2\right) = \hbar\cancel{\omega}$$

$$\begin{cases} |c_0|^2 + 3|c_1|^2 = 2 \\ |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \end{cases}$$

$$|c_0| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\varphi} \quad (\varphi = 0)$$
$$|c_1| = 1/\sqrt{2} \rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\theta}$$

On considère un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation ω, l'hamiltonien est alors donné par ; $$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 .$$

A l'instant t = 0, l'état de cet oscillateur est donné par ; $$|\psi(0)\rangle = \sum_n C_n \; |\varphi_n\rangle$$

où $|\varphi_n\rangle$ sont les états stationnaires de H, d'énergies ; $$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega .$$

1) Déterminer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t > 0. Quelle est la probabilité $\mathcal{P}$ pour qu'une mesure de l'énergie de l'oscillateur effectuée à l'instant t donne un résultat supérieur à $2\hbar\omega$? Lorsque $\mathcal{P} = 0$, quels sont les coefficients C_n non nuls?

2) On suppose à partir de maintenant que seuls C_0 et C_1 sont différents de zéro.

a) Calculer les valeurs moyennes $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$, $\langle X^2\rangle$ *et* $\langle P^2\rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$, en déduire les écarts quadratiques moyens ΔX et ΔP dans ce même état.

b) Calculer la valeur moyenne de l'énergie $\langle H\rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$. En imposant que $\langle H\rangle = \hbar\omega$ et en écrivant la condition de normalisation de $|\psi(0)\rangle$, calculer $|C_0|^2$ *et* $|C_1|^2$

3) Le vecteur d'état normé $|\psi(0)\rangle$ n'étant défini qu'à un facteur de phase globale près, on fixe ce facteur de phase en prenant C_0 réel et positif. On pose $C_1 = |C_1| \exp i\theta_1$.

En plus, de $\langle H\rangle = \hbar\omega$, on suppose que $\langle X\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Calculer θ_1.

4) $|\psi(0)\rangle$ étant ainsi déterminé, écrire $|\psi(t)\rangle$ pour t > 0 et calculer la valeur de θ_1 à l'instant t. En déduire la valeur moyenne $\langle X(t)\rangle$ de la position à l'instant t.

$$\langle X\rangle = \sqrt{\frac{\cancel{\hbar}}{2\cancel{m\omega}}} \cdot \left(C_0^* C_1 + C_1^* C_0\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\cancel{\frac{\hbar}{m\omega}}}$$

$$C_0 C_1 + C_1^* C_0 = 1/\sqrt{2}$$

$$\left(C_1 + C_1^*\right) = 1/\sqrt{2}$$

$$\cdot\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = 1/\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} C_1 = |C_1|\, e^{i\theta} \\ C_1^* = |C_1|\, e^{-i\theta} \end{cases}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$|\psi(0)\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{C_0} \cdot |\varphi_0\rangle + \underbrace{\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}}_{C_1} \cdot |\varphi_1\rangle$$