Exercice1/

On considère un système physique dont l'espace des états est à trois dimensions et rapporté à la base orthonormée formée par $\{|u_1\rangle , |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Dans la base de ces trois vecteurs, l'hamiltonien H du système et l'observable A sont donnés par :

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a et ω_0 sont des constantes réelles.

Le système à l'instant t = 0 est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

1) On mesure, à l'instant t = 0, l'énergie du système, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

- Calculer pour le système dans l'état $|\psi(0)>$ l'écart quadratique moyen ΔH.

2) A t=0 on mesure H, on trouve $2\hbar\omega_0$, quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure?

3) Au lieu de mesurer H à l'instant t = 0, on mesure A, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités?

Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?

4) Calculer le vecteur d'état $|\psi(t)>$ du système à l'instant t.

5) Quels résultats obtient-on si l'on mesure à l'instant t l'observable A ? Interprétation ?

$$\mathcal{E} = \{|u_1\rangle ; |u_2\rangle ; |u_3\rangle\}. \qquad \dim \mathcal{E} =$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle .$$

$$\hat{H} \longrightarrow \boxed{|\psi(0)\rangle} \longrightarrow E_n$$

val. propres de $\hat{H}$: = { Résultat de mesure }

$$\det\left(\bar{H} - \lambda\, \mathbb{1}_{3,3}\right) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\bar{H} = \frac{H}{\hbar\omega_0}$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\lambda = 1 \qquad \lambda = 2.$$

$$E_1 = \hbar\omega_0 \quad , \quad E_2 = 2\hbar\omega .$$

Résultat possible = $\{\hbar\omega_0, 2\hbar\omega_0\}$.

* Vect propres: $\hbar\omega_0 \longrightarrow |u_1\rangle$

$2\hbar\omega_0 \longrightarrow \underline{|u_2\rangle}, \underline{|u_3\rangle}$

$$P(\hbar\omega_0) = |\langle u_1|\psi(0)\rangle|^2 = \left|\langle u_1|\left(\frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \dots\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(2\hbar\omega_0) = |\langle u_2|\psi(0)\rangle|^2 + |\langle u_3|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sum P = 1 \iff P(\hbar\omega) + P(2\hbar\omega) = 1$$

$$+ \quad \Delta H = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2}$$

$$\langle H\rangle = \langle\psi(0)|\, H\, |\psi(0)\rangle . = \sum_{i=1}^{2} E_i\, P(E_i)$$

$$\langle H \rangle_{|\psi(0)\rangle} = \langle \psi(0)| H |\psi(0)\rangle = \sum_{i=1}^{2} E_i \, P(E_i)$$

$$= \hbar\omega_0 \tfrac{1}{2} + 2\hbar\omega_0 \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\langle H \rangle_{|\psi\rangle} = \tfrac{3}{2}\hbar\omega_0 \quad \rightarrow \quad \langle H \rangle^2 = \tfrac{9}{4}\hbar^2\omega_0^2$$

$$\underline{H}^2 = \hbar^2 \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

val. H^2 : $\hbar^2\omega_0^2$, $\underline{\underline{4\hbar^2\omega_0^2}}$

$$\begin{cases} P(\hbar^2\omega_0^2) = |\langle v_1 | \psi(0)\rangle|^2 = \tfrac{1}{2} \\ P(4\hbar^2\omega_0^2) = \tfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\langle H^2 \rangle = \tfrac{1}{2}(\hbar\omega_0)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 4(\hbar\omega_0)^2 = \tfrac{5}{2}(\hbar\omega_0)^2$$

$$\Delta H = \sqrt{\frac{\hbar^2\omega_0^2}{4}} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

2) $\underline{\underline{t = 0:}}$

$$\hat{H} \rightarrow \boxed{|\psi(0)\rangle} \rightarrow E_2 = 2\hbar\omega_0 \rightarrow \boxed{|\psi'\rangle}$$

$(|v_2\rangle, |v_3\rangle)$

$$\underline{\underline{|\psi'\rangle}} = \frac{P_2 |\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(0)| P_2 |\psi(0)\rangle}}$$

$$P_2 = |v_2\rangle\langle v_2| + |v_3\rangle\langle v_3|$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 |\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}|v_2\rangle + \tfrac{1}{2}|v_3\rangle$$

$$\| P |\psi(0)\rangle \| = \sqrt{\langle \psi(0)| P |\psi(0)\rangle} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\| P_2 |\psi(0)\rangle \| = \sqrt{\langle \psi(0) | P_2 | \psi(0)\rangle} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$|\psi'\rangle = \frac{\frac{1}{2}|v_2\rangle + \frac{1}{2}|v_3\rangle}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|v_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|v_3\rangle$$

$$\hat{A} \longrightarrow \boxed{|\psi(0)\rangle} \text{ — } (\hbar\omega_0) \longrightarrow |\psi'\rangle .$$

v.p : $|v_1\rangle$

$$|\psi'\rangle = \frac{P_1 |\psi(0)\rangle}{\| P_1 |\psi(0)\rangle \|}$$

$$P_1 = |v_1\rangle\langle v_1|$$

$$P_1 |\psi(0)\rangle = |v_1\rangle\langle v_1| \left(\frac{i}{\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{1}{2}|v_2\rangle + \frac{1}{2}|v_3\rangle \right)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} |v_1\rangle \underbrace{\langle v_1 | v_1\rangle}_{1} + \frac{1}{2} |v_1\rangle \cancel{\langle v_1 | v_2\rangle}^{0} + \frac{1}{2} |v_1\rangle \cancel{\langle v_1 | v_3\rangle}^{0}$$

$i \neq j = 0$
$i = j = 1$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} |v_1\rangle$$

$$\| P_1 |\psi(0)\rangle \| = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

$$\boxed{|\psi'\rangle = i |v_1\rangle}$$

3) $A \longrightarrow \boxed{|\psi(0)\rangle}$

$$A = a \begin{array}{c} |v_1\rangle \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\bar{A} = a \cdot \begin{array}{cc} |v_2\rangle & |v_3\rangle \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \left(\bar{A} - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2} \right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - a^2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_+ = +a \end{cases}$$ 2 fois dégénéré.

$$\begin{cases} \lambda_+ = +a & \text{2 fois dégénéré.} \\ \lambda_- = -a & \end{cases}$$

$\lambda_+ \longrightarrow |\lambda_+\rangle$

$|\lambda_+\rangle \in \{|v_2\rangle, |v_3\rangle\}$

$|\lambda_+\rangle = \alpha|v_2\rangle + \beta|v_3\rangle$.

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ (1)

$\bar{A}|\lambda_+\rangle = a|\lambda_+\rangle$.

$\cancel{a}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cancel{a}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\boxed{\alpha = \beta}$ (2)

$2|\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$|\lambda_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|v_2\rangle + |v_3\rangle + 0|v_1\rangle\right)$

* $|\lambda_-\rangle = \alpha'|v_2\rangle + \beta'|v_3\rangle$

$|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1$

$\bar{A}|\lambda_-\rangle = -a|\lambda_-\rangle$

$\cancel{a}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\cancel{a}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$

$\boxed{\beta' = -\alpha'} \Rightarrow |\alpha'| = -\beta'$

$|\alpha'|^2 + |\alpha'|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha'| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad |\lambda_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle - |v_2\rangle)$ ✓

$|\alpha| + |\eta| \ldots$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad |\lambda_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle - |u_3\rangle\right) \checkmark$$

$$2|\beta'|^2 = 1 \Rightarrow |\beta'| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta' = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \alpha' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\lambda_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_3\rangle - |u_2\rangle\right) \checkmark$$

$$P(+a) = |\langle u_1|\psi(0)\rangle|^2 + |\langle\lambda_+|\psi(0)\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\langle\lambda_+|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P(-a) = 0 = |\langle\lambda_-|\psi(0)\rangle|^2$$

4) $|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$

$t_0 = 0$: $\quad |\psi(t)\rangle = U(t,0)\,|\psi(0)\rangle$

$$U(t,0) = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}$$

$$e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle\right\}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}e^{-iE_2t/\hbar}|u_2\rangle + \frac{1}{2}e^{-iE_2t/\hbar}|u_3\rangle$$

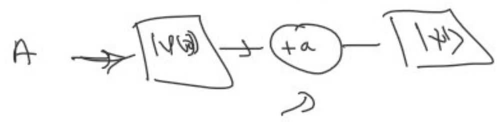
$$|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t}|u_1\rangle + \frac{1}{2}e^{-i2\omega_0 t}\left(|u_2\rangle + |u_3\rangle\right).$$

$$|\psi'\rangle = \frac{P_n|\psi\rangle}{\||P_n|\psi\rangle\||}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle.$$

$H|u_1\rangle = \ldots$

$P(-a) = 0$



$$P_+ = |v_1\rangle\langle v_1| + |\lambda_+\rangle\langle\lambda_+|$$

$$P_+|\psi(0)\rangle = \left(|v_1\rangle\langle v_1| + |\lambda_+\rangle\langle\lambda_+|\right)\left(\frac{i}{\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{1}{2}|v_2\rangle + \frac{1}{2}|v_3\rangle\right)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}|v_1\rangle\langle v_1|v_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\lambda_+\rangle\underbrace{\langle\lambda_+|v_1\rangle}_{=0} + \frac{1}{2}|\lambda_+\rangle\langle\lambda_+|v_2\rangle + \frac{1}{2}|\lambda_+$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{1}{2}|v_2\rangle + \frac{1}{2}|v_3\rangle = |\psi(0)\rangle$$

$\langle x_t | y \rangle$