Be In Sciences

Centre Be in sciences

Séances

Analyse 2

ENSA - FST

Par **Ahmed OMARI**

Pour plus d'info, Visitez notre site web : https://beinsciences.com/

Facebook : https://www.facebook.com/beinsciences

Secrétariat : +212 657-883241

Série numériques: Règles et techniques de calcul

Wednesday, May 25, 2022 2:45 PM

Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\underbrace{n(n+1)}_{\text{décomposition}}(n+2)}$.

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

$$a = \frac{x}{x(x+1)(x+2)} - \frac{bx}{x+1} - \frac{cx}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{bx}{x+1} - \frac{cx}{x+2}.$$

$$x=0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} - 0 - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$b = \frac{1}{x(x+2)} - \frac{a(x+1)}{x} - \frac{c(x+1)}{(x+2)} \quad x=-1. \quad b=-1.$$

$$c = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{a(x+2)}{x} - \frac{b(x+2)}{x+1}. \quad x=-2, \quad b = \frac{1}{2}.$$

Donc $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}\right) + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}\right)$

$$\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}_{u_n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

série télescopique

. Les sommes partielles de (u_n).

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right).$$

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \left(\quad\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

alors : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{4}$.

. Comparaison d'une série à une intégrale :

f une fct continue. tq : $u_n = f(n)$. alors : $\sum_{n\geq 0} u_n \sim \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2} \sim \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$. est cv.

. Règle de $n^{\alpha} u_n$: ($\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n \geq 0$)

alors : si $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$.
- si $\alpha > 1$. alors $\sum u_n$ CV.
- si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ div.
- $\alpha = 1$ —

$n^\alpha u_n - \ell < \varepsilon = 1.$ $\quad n^\alpha u_n \leq 1-\ell. \to u_n \leq \dfrac{1-\ell}{n^\alpha}$ $\quad \Sigma$ $\quad \alpha > 1.$

$-\varepsilon < n^\alpha u_n - \ell \Leftrightarrow \dfrac{\overbrace{\ell-\varepsilon}^{=\ell+1}}{n^\alpha} < u_n.$

$\alpha < 1. \Rightarrow n^\alpha < n. \to \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n^\alpha}.$

$\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n^\alpha} < u_n$

$\sum \frac{1}{n}$ div.

Exemple :

$$u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}.$$

Soit $\alpha > 1.$ $\quad \dfrac{n^\alpha}{\ln(n)^n}$: On a : $\ln\left(\dfrac{n^\alpha}{\ln(n)^n}\right) = \ln(n^\alpha) - \ln(\ln(n)^n)$

$$= \alpha \ln(n) - n \ln(\ln(n))$$

$$\frac{n^\alpha}{\ln(n)^n}. = n\Big(\underbrace{\frac{\alpha \ln(n)}{n}}_{\to 0} - \underbrace{\ln(\ln(n))}_{\to -\infty}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

alors : $\dfrac{n^\alpha}{(\ln(n))^n} = \exp\Big(\underbrace{\ln\Big(\dfrac{n^\alpha}{(\ln(n))^n}\Big)}_{\to -\infty}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

et on $0 < 1$. donc d'après la règle de $n^\alpha u_n$. $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{\ln(n)}$ est cv

Séries de Bertrand :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ est cv} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{cases}$$

$\sum_{n\geq 2} \dfrac{n^1}{(\ln(n))^3} = \sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{-1}(\ln(n))^\beta} = .\ \alpha = -1 < 1$ donc Σ. div.

$\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^3 \ln(n)}$. $\alpha = 3 > 1$. cv.

Règle de Cauchy : Si $\sqrt[n]{U_n} \longrightarrow \ell$.

alors : $\ell < 1$: $\sum_{n\geq 0} U_n$ cv.

$\ell > 1$. $\sum_{n\geq 0} U_n$ div.

$\ell = 1$: —

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln(n))^n}. \qquad \sqrt[n]{U_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n))^n}} = \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1. \quad \text{d'où } \sum U_n \text{ cv.}$$

Critère de d'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell. \qquad \text{donc : } \begin{cases} \ell < 1 & \text{cv.} \\ \ell > 1 & \text{div.} \\ \ell = 1 & - \end{cases}$$

$$U_n = \frac{n!}{n^{\alpha n}}. \qquad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\overset{n!(n+1)}{(n+1)!}}{(n+1)^{\alpha(n+1)}} \times \frac{n^{\alpha n}}{n!} = \frac{n^{\alpha n}}{(n+1)^{\alpha n}} \times \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}.$$

$\alpha \in \mathbb{R}$.

On a : $$\ln\left(\frac{n^{\alpha n}}{(n+1)^{\alpha n}}\right) = \ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha n}\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\alpha n}\right)$$

$\ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\ln(u)$

$$= \alpha n \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = -\alpha n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$= -\alpha \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\alpha.$$

donc : $\left(\dfrac{n^{\alpha n}}{(n+1)^{\alpha n}}\right) \longrightarrow e^{-\alpha}$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-\alpha} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha}}$ $\begin{cases} 0 & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ +\infty & \alpha<0 \end{cases}$

Donc : $\sum U_n$ cv ssi $\alpha > 0$.

Séries à termes quelconques.

- $\sum U_n$. on dit que cette série cv absolument si $\sum\limits_{n\geq 0} |U_n|$ converge.

si $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est absolument cv. alors : $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ cv.

la réciproque est fausse en général.

- la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{\sin(2^n n)}{n!}$. on a : $\left|\dfrac{\sin(2^n n)}{n!}\right| \leq \dfrac{1}{n!}$.

et on a : $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$ cv. $(=e)$. $\left(\dfrac{1}{(n+1)!} \times n! = \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0.\right)$

$\dfrac{1}{n!}$, $\dfrac{1}{n^2}$. $\dfrac{n!}{n^n}$,

Donc : $\sum\limits_{n\geq 0} \left|\dfrac{\sin(2^n n)}{n!}\right|$ converge.

donc : $\sum \dfrac{\sin(2^n n)}{n!}$ converge absolument $\Rightarrow$ converge.

Critère des séries alternées :

U_n : alternée si le signe de U_n est inverse au signe de U_{n+1}

$U_n = -3$, $U_{n+1} = 7$ $U_{n+2} = -9$ $U_{n+3} = 10 \ldots$

$U_n = (-1)^n V_n$ où $(V_n)_n$ suite positive.

$(u_n)_n$ suite alternée. $\left(u_n = (-1)^n |u_n| . \right)$

si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $(|u_n|)_n$ décroissante. $\left(|u_{n+1}| < |u_n| \right)$

alors : $\sum u_n$ est convergente. et on a : $\underbrace{\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right|} < |u_{n+1}|$.

$\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ $\frac{(-1)^n}{n}$ alternée. $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ + décroissante. $\left(\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \right)$.

alors : $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Be In Sciences