Théorème d'Ampère :

Ce fichier est préparé par **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
$\forall$ error found $\in$ doc : contact us on discord.
Let's make ENSA AGADIR great again!

Circulation du champ magnétostatique :

La circulation élémentaire du champ magnétostatique $\vec{B}$ est :

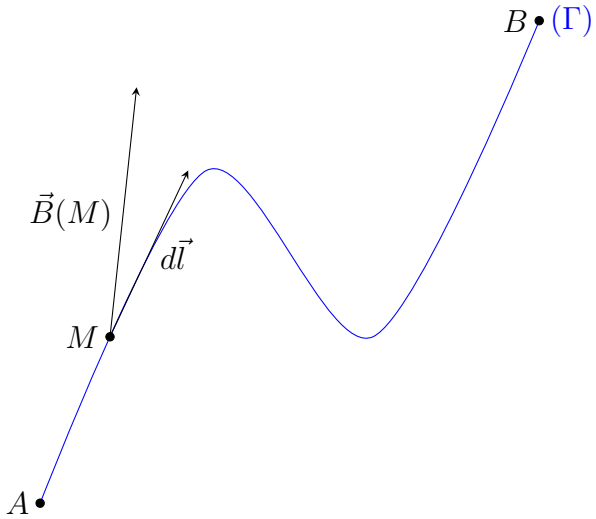
$$\mathrm{d}\mathscr{C} = \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l}$$

On considère un trajet AB sur la courbe (Γ).
La circulation totale est :

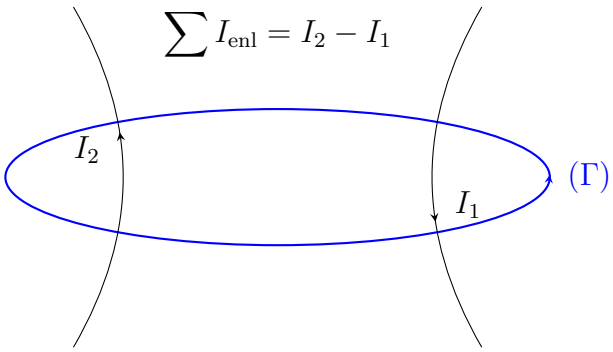
$$\mathscr{C} = \int_{AB} \mathrm{d}\mathscr{C} = \int_{AB} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l}$$

Si le chemin est fermé :

$$\mathscr{C} = \oint_{AB} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l}$$



Le théorème d'Ampère :



La circulation du champ magnétostatique $\vec{B}$ le long du contour fermé (Γ) est égale au produit de μ_0 par l'intensité enlacée par (Γ), c'est-à-dire :

$$\mathscr{C} = \mu_0 \sum I_{\text{enl}}$$

Par suite :

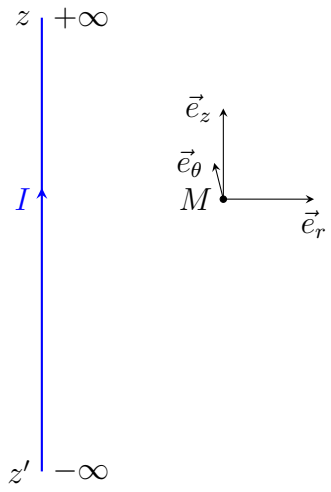
$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enl}}$$

Comment on peut utiliser le théorème d'Ampère ?

1. Choix du système des coordonnées.
2. Étude des invariances et des symétries ou antisymétrie que le problème présente.
3. Choix du Contour d'Ampère.
4. Détermination de l'intensité du courant enlacée par ce contour.
5. Association du module trouvé B à sa direction portée par un vecteur unitaire.

On traite les cas classiques :

Fil infini parcouru par une intensité de courant constante :



On veut calculer le champ crée par ce fil en M dans l'espace. on utilisera pour cela les coordonnées cylindriques (r, θ, z).
Ce problème présente deux invariances :
Le champ est invariant par toute translation le long de l'axe $(z'z)$, ainsi qu'il est invariant par toute rotation autour de cet axe.
C'est-à-dire : $B(r, \theta, z) = B(r)$.
Le plan $\Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour cette distribution de courant. C'est-à-dire $\vec{B} \perp \Pi \Longrightarrow \vec{B}$ est porté par $\vec{e}_\theta$.
Finalement :

$$\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$$

Le contour d'Ampère sera le cercle de rayon r et centré autour de l'axe $(z'z)$ orienté dans le sens anti-horaire.

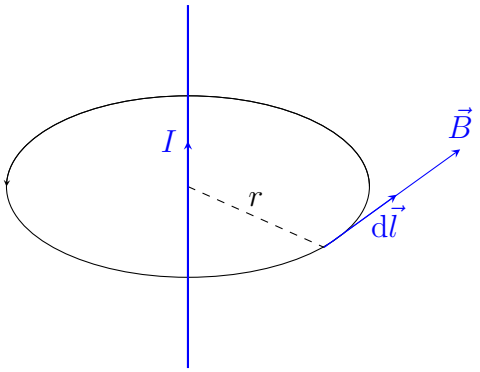
On applique le théorème d'Ampère :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enl}}$$

$$\oint_{(\Gamma)} B\vec{e}_\theta r \mathrm{d}\theta \vec{e}_\theta = \mu_0 I$$

$$Br2\pi = \mu_0 I$$

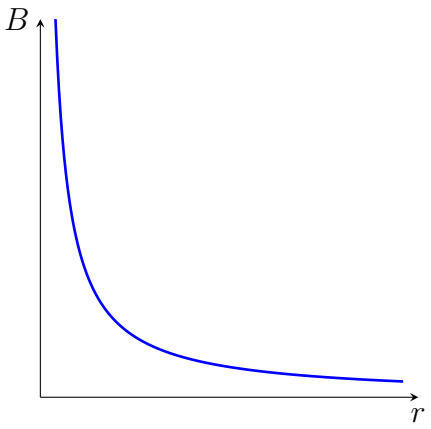
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Vectoriellement :

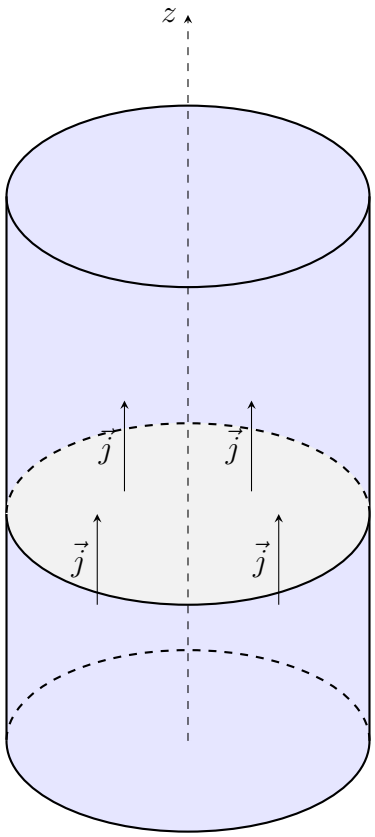
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

On représente l'allure de l'intensité du champ magnétique :



Câble infini parcouru avec une densité de courant volumique :

On considère un câble de longueur infini parcourue avec une densité de courant volumique $\vec{j}$

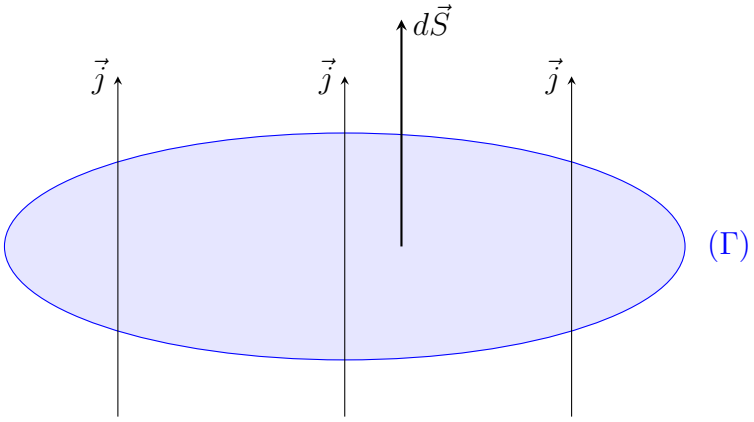


On va traiter des différents cas où $\vec{j}$ est uniforme et non uniforme.

$$\mathrm{d}I = \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S}$$

$$I = \iint_S \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S}$$

Dans ce cas on considère que la distribution $\vec{j} = j_0\vec{e}_z$, où $j_0 = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} > 0$.



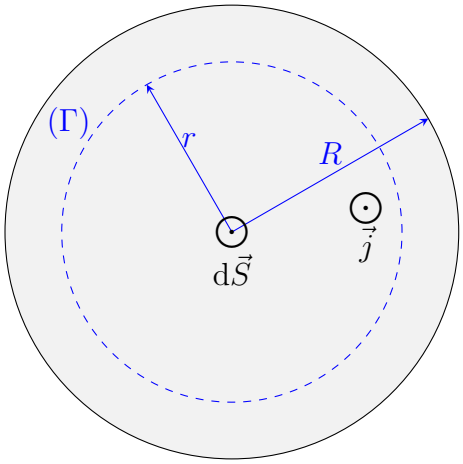
$$\begin{aligned} I &= \iint_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{S} \\ &= j_0 \iint r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= j_0\pi R^2 \\ j_0 &= \frac{I}{\pi R^2} \end{aligned}$$

D'après une analyse de symétrie, on déduit que le plan $\Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour cette distribution de courant, donc $\vec{B} \parallel \vec{e}_\theta$. Et d'après une autre analyse des invariances on déduit que le champ est invariant par toute rotation autour de l'axe (Oz) ainsi par toute translation le long de ce dernier. Par suite : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.
Les lignes de champs sont des cercle centrés sur (Oz). Le contour judicieux est un cercle (Γ) de rayon r et de centre (Oz).

$$\begin{aligned} \oint_{(\Gamma)} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l} &= \oint_{(\Gamma)} B(r)r\mathrm{d}\theta \\ &= Br\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ \mathscr{C} &= Br2\pi \end{aligned}$$

Pour $r < R$:

$$\begin{aligned}\sum I_{\text{enl}} &= \iint_{(\Gamma)} \vec{j}\mathrm{d}\vec{S} \\ &= j_0 \pi r^2 \\ &= \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2 \\ I_{\text{enl}} &= \frac{I r^2}{R^2}\end{aligned}$$

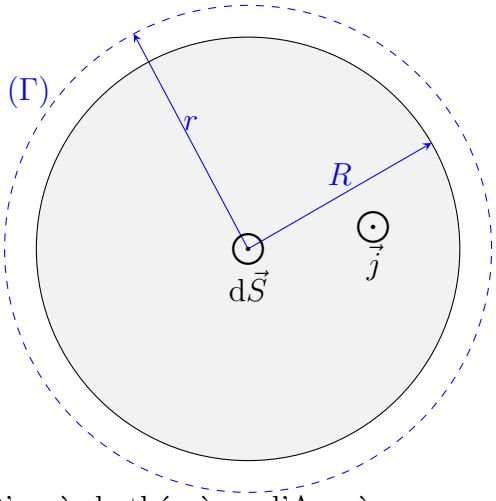


En appliquant le théorème d'Ampère on aura :

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\vec{B}) &= \mu_0 \sum I_{\text{enl}} \\ Br2\pi &= \frac{\mu_0 I r^2}{R^2} \\ B &= \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}\end{aligned}$$

Vectoriellement :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}\vec{e}_\theta$$



Pour $r > R$:

$$\begin{aligned}\sum I_{\text{enl}} &= \iint_{(\Gamma)} \vec{j}\mathrm{d}\vec{S} \\ &= I \\ &= j_0 \pi R^2\end{aligned}$$

D'après le théorème d'Ampère :

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\vec{B}) &= \mu_0 \sum I_{\text{enl}} \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\end{aligned}$$

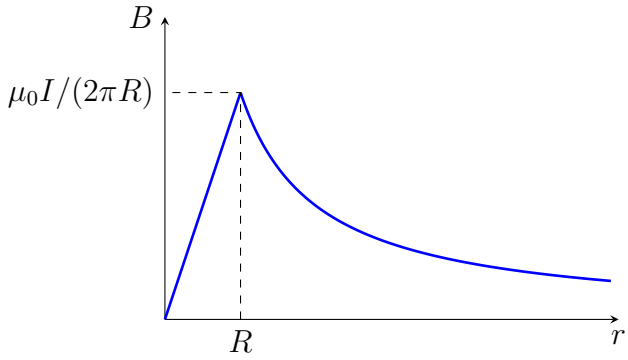
Vectoriellement :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

D'où en tout point de l'espace :

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & ; r > R \\ \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & ; r < R \end{cases}$$

Le champ est clairement continue à la traversée $r = R$.



Dans le deuxième cas, on s'intéresse à une densité volumique de courant de tel sorte que : $\vec{j} = \alpha r^2 \vec{e}_z$ où $\alpha = \mathrm{C^{te}}$:
On a :

$$\begin{aligned} I &= \iint \vec{j} \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \iint \alpha r^2 r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\ &= \alpha \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= \alpha \frac{R^4}{4} 2\pi \\ &= \frac{\alpha R^4 \pi}{2} \end{aligned}$$

La circulation est donnée par :

$$\mathscr{C}(\vec{B}) = \oint_{(\Gamma)} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r B$$

Pour $r < R$:
On aura

$$\sum I_{\mathrm{enl}} = \iint \vec{j} \mathrm{d}\vec{S} = \alpha\pi \frac{r^4}{2}$$

D'où d'après théorème d'Ampère :

$$\begin{aligned} \oint_{(\Gamma)} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l} &= \mu_0 \sum I_{\mathrm{enl}} \\ 2\pi r B &= \frac{\mu_0 \alpha \pi r^4}{2} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0 \alpha r^3}{4} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Pour $r > R$: On a :

$$\sum I_{\mathrm{enl}} = I = \frac{\alpha\pi R^4}{2}$$

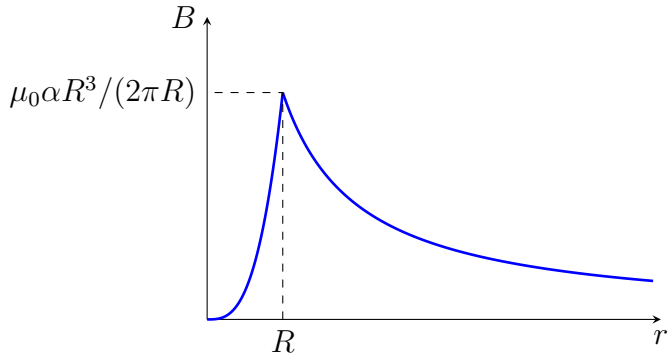
Par application du théorème d'Ampère :

$$\begin{aligned} 2\pi r B &= \mu_0 \frac{\alpha \pi R^4}{2} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0 \alpha R^4}{4r} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

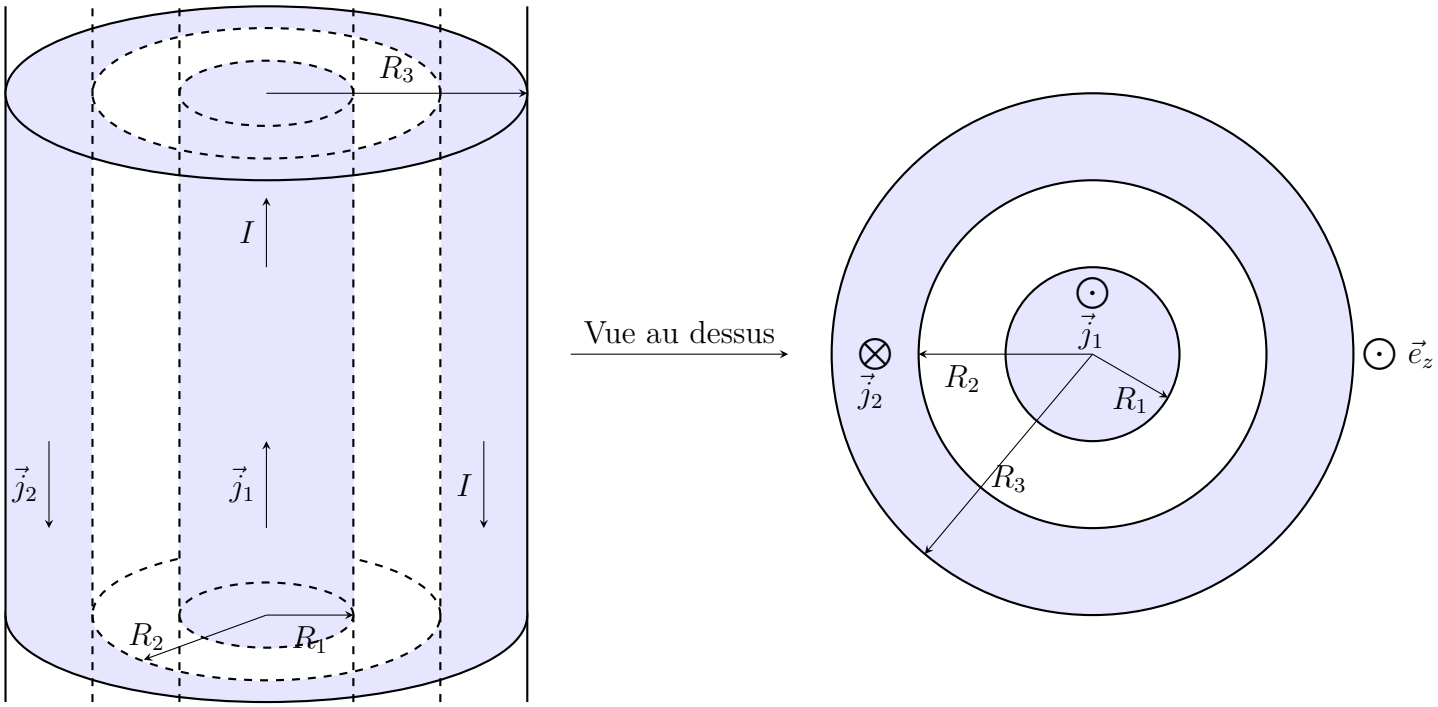
En tout point de l'espace :

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \alpha \pi r^3}{4} \vec{e}_\theta & r < R \\ \dfrac{\mu_0 \alpha R^4}{4r} \vec{e}_\theta & r > R \end{cases}$$

On remarque que le champ est continue à la traversé $r = R$, son allure sera comme suit :



Câble coaxial : On considère un câble coaxial infini cylindrique, de rayons $R1 < R2 < R3$.
Le courant d'intensité totale I passe dans un sens dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.
On suppose que le courant est réparti de manière volumique et uniforme dans le conducteur intérieur et de manière surfacique dans le conducteur extérieur. La figure ci dessous montre cette répartition plus :



Pour les symétries et les invariances, le processus est analogue aux exemples précédents, on retrouve toujours que le champs est orthoradial et ne dépend que de r : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.
Dans le câble intérieur on a :

$$\begin{aligned} I &= \iint \vec{j}_1 \mathrm{d}\vec{S}_1 \\ &= j_1 \pi R_1^2 \\ \vec{j}_1 &= \frac{I}{\pi R_1^2}\vec{e}_z \end{aligned}$$

Dans le câble extérieur on a :

$$\begin{aligned} -I &= \iint \vec{j}_2 \mathrm{d}\vec{S}_1 \\ &= j_2 \int_{R_2}^{R_3} r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ \vec{j}_1 &= -\frac{I}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}\vec{e}_z \end{aligned}$$

Ces deux expressions seront utilisées pour déterminer le champ magnétique.
On a 4 cas à discuter, on commence par le cas où $r < R_1$:

$$\begin{aligned}\sum I_{\text{enl}} &= \iint \vec{j}_1 \mathrm{d}\vec{S}_1 \\ &= j_1 \pi r^2 \\ &= \frac{I r^2}{R_1^2}\end{aligned}$$

En utilisant le théorème d'Ampère sur un contour (Γ) (Cercle de centre O et rayon r) on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l} &= \mu_0 \sum I_{\text{enl}} \\ B 2\pi r &= \frac{\mu_0 I r^2}{R_1^2} \\ B &= \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

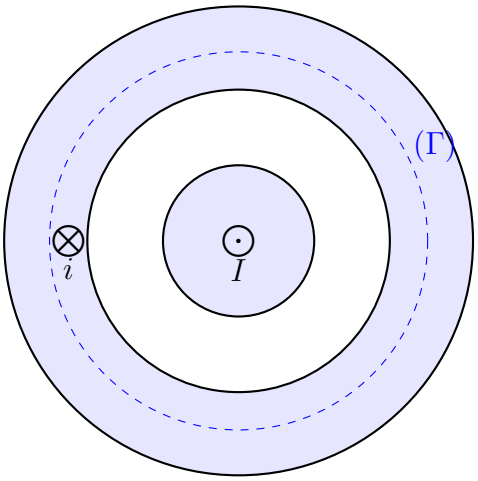
Si $R_1 < r < R_2$: L'intensité des courants enlacées par le contour d'Ampère qui est toujours un cercle (Γ) est $+I$. Ce cas est traité dans le deuxième exemple de cet article, en effet l'application du théorème d'Ampère mène à l'expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

Si $R_2 < r < R_3$: La somme des courants enlacées par le contour d'Ampère est :

$$\sum I_{\text{enl}} = +I - i$$

où $i = \iint \vec{j}_2 \mathrm{d}\vec{S}_2$, on clarifie ceci par la figure ci dessous :



$$\begin{aligned}i &= \iint \vec{j}_2 \mathrm{d}\vec{S}_2 \\ &= j_2 \int_{R_2}^{r} r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{-I}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)} \left(2\pi \left(\frac{r^2 - R_2^2}{2}\right)\right) \\ &= -I\frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\end{aligned}$$

D'où :

$$\sum I_{\text{enl}} = I\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = I\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

Par application du théorème d'Ampère :

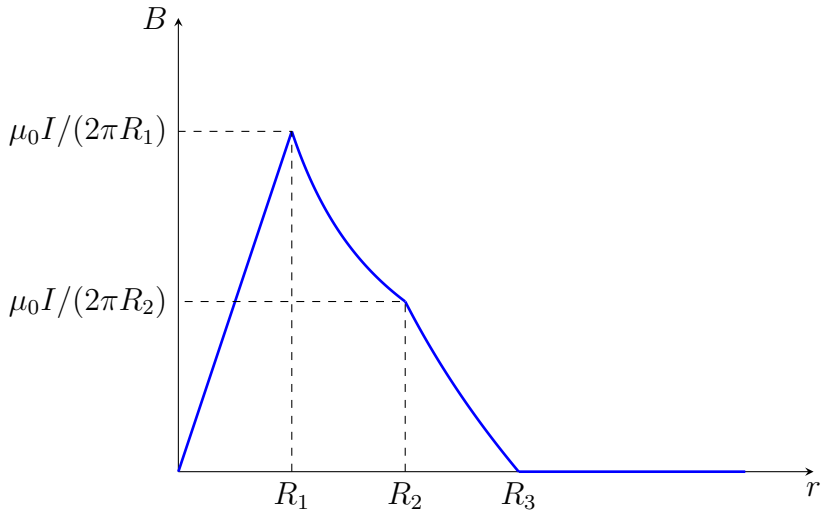
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\vec{e}_\theta$$

Pour le dernier cas, c'est-à-dire $r > R_3$, on a trivialement $\sum I_{\text{enl}} = I - I = 0$ d'où le champ est nul à l'extérieur du câble : $\vec{B} = \vec{0}$.

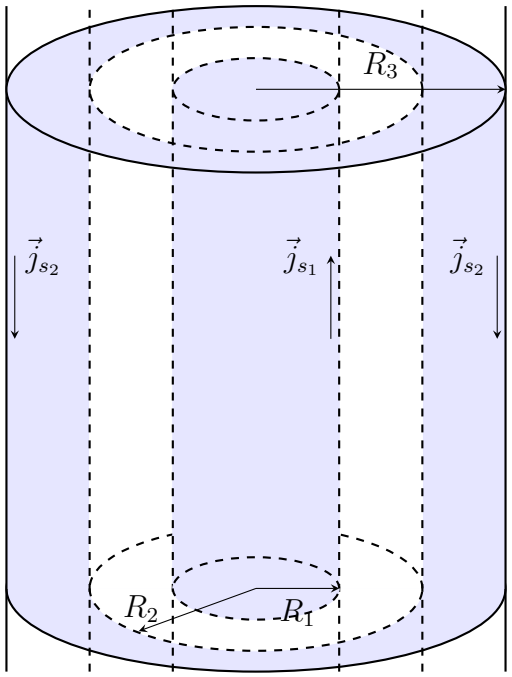
En tout point de l'espace :

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}\vec{e}_\theta & r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta & R_1 < r < R_2 \\ I\dfrac{\mu_0}{2\pi r}\dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\vec{e}_\theta & R_2 < r < R_3 \\ \vec{0} & r > R_3 \end{cases}$$

La continuité est vérifiée à chaque point du traversée (lorsque $r = R_1$, $r = R_2$ et $r = R_3$). Par suite le champ est continue en toute région de l'espace. L'allure de B en fonction de r est représenté dans la figure ci dessous



Dans ce cas, on considère que les épaisseurs des parois des 2 cylindres sont négligeable, ceci nécessite la prise en charge d'une répartition surfacique du courant.



Rapidement on peut conclure qu'en tout point de l'espace :

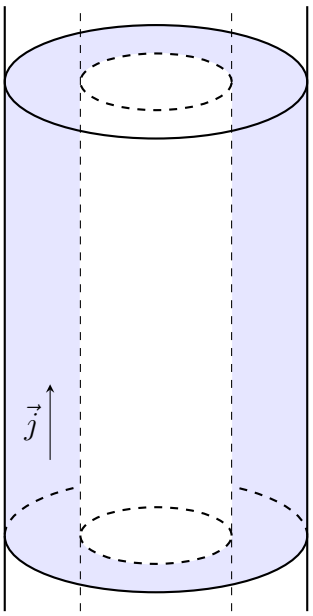
$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{0} & r < R_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta & R_1 < r < R_2 \\ \vec{0} & r > R_2 \end{cases}$$

Le champ est clairement discontinu, et cela peut être vérifié par la relation suivante :

$$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2}$$

Pour $r = R_1$ on a $\vec{B}_2 = \mu_0 I/(2\pi R_1)\vec{e}_\theta$ et $\vec{B}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_1 - \vec{B}_2 \neq 0$, on peut facilement calculer, le produit vectoriel et déduire la discontinuité.
On prend un autre cas où le cylindre est creux (comme le montre cette figure) de rayon R_1 intérieur et R_2 extérieur, il est supposée infini et parcourue par $\vec{j}$ tel que :

$$\vec{j} = \frac{C}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right) \qquad \text{où} \qquad C, a = \mathrm{C^{te}}$$



On calcule I :

$$\begin{aligned} I &= \iint \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S} \\ &= \iint jr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \iint \frac{C}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= C\int_{R_1}^{R_2} e^{-r/a}\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= Ca\left(e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a}\right)2\pi \end{aligned}$$

D'où :

$$I = 2\pi Ca\left(e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a}\right)$$

D'après une analyse de symétrie et des invariances, le champ est toujours $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.
Pour $r < R_1$ on a $\sum I_{\mathrm{enl}} = \vec{0} \Leftarrow \vec{B} = \vec{0}$.
Pour $R_1 < r < R_2$ on a : $\sum I_{\mathrm{enl}} = \iint \vec{j}\mathrm{d}\vec{S}$ cette intégrale est évaluée comme la précédente, et on trouve que $\sum I_{\mathrm{enl}} = 2\pi Ca\left(e^{-R_1/a} - e^{-r/a}\right)$.
Donc par application du théorème d'Ampère sur un contour (Γ) choisi comme une cercle de rayon r :

$$\begin{aligned} \oint_{(\Gamma)} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l} &= \mu_0 \sum I_{\mathrm{enl}} \\ B2\pi r &= \mu_0 2\pi Ca\left(e^{-R_1/a} - e^{-r/a}\right) \\ \vec{B} &= \frac{Ca\mu_0}{r}\left(e^{-R_1/a} - e^{-r/a}\right)\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

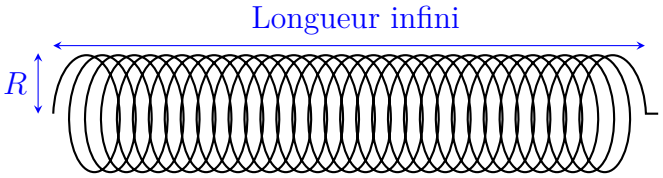
Pour $r > R_2$ on a $\sum I_{\text{enl}} = I = 2\pi Ca\left(e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a}\right)$, par application du théorème d'Ampère on obtient :

$$\vec{B} = \frac{Ca\mu_0}{r}\left(e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a}\right)\vec{e}_\theta$$

En tout point de l'espace :

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{0} & r < R_1 \\ \dfrac{Ca\mu_0}{r}\left(e^{-R_1/a} - e^{-r/a}\right)\vec{e}_\theta & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Ca\mu_0}{r}\left(e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a}\right)\vec{e}_\theta & r > R_2 \end{cases}$$

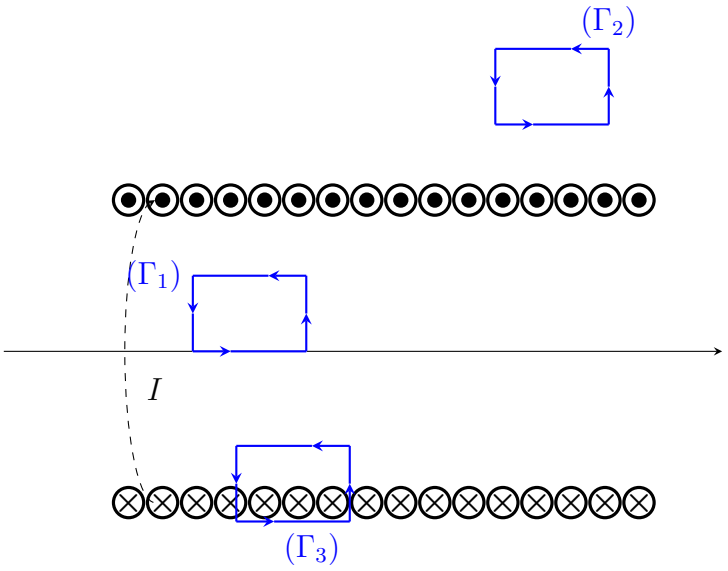
Solénoïde infini parcouru par une intensité de courant I:
On considère un solénoïde infini dans la direction (Oz) :



Calculons le champ magnétique crée en tout point de l'espace par ce solénoïde.
Le champ est invariant par toute translation le long de l'axe (Oz), ainsi qu'il est invariant par toute rotation d'angle θ, $B(r, \theta, z) = B(r)$
Le plan $\Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie pour cette distribution de courant, donc $\vec{B} \perp \Pi \Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{e}_z$, donc :

$$\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$$

Les lignes de champs sont des droites portés (Oz). Le contour d'Ampère est un carré $(\Gamma)_i \equiv (ABCD)$ de côté L.
Si M à l'extérieur :



Pour le contour (Γ_1), on a d'après théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = \oint_{AB} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} + \oint_{BC} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} + \oint_{CD} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} + \oint_{DA} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = 0$$

On sait que $\vec{B} \parallel (Oz)$, donc l'intégrale devient :

$$\int_{z_A}^{z_B} B.\mathrm{d}z - \int_{z_C}^{z_D} B.\mathrm{d}z = 0 \Leftrightarrow B.L = B.L$$

Ceci nous montre que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde infini.
Pour le contour (Γ_2), on a par application du théorème d'Ampère : on obtient le même résultat, c'est-à-dire un champ uniforme à l'extérieur. Mais comme ce champ doit être nul à l'infini, on en déduit qu'il est nul partout, c'est à dire : $B_{\text{ext}} = 0$.
Pour le contour (Γ_3) :

$$\oint_{\Gamma_3} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = \oint_{AB} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} + \oint_{BC} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} + \oint_{CD} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} + \oint_{DA} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = -NL\mu_0 I$$

De même et en prenant en considération que le champ est nul à l'extérieur on obtient que :

$$B = N\mu_0 I$$

Avec N le nombre des spires que le contour délimite.