Be In Sciences

Centre Be in sciences

Séances

Analyse 2

ENSA - FST

Par **Ahmed OMARI**

Séries numériques

Saturday, May 7, 2022 5:48 PM

Définition : $(U_n)_n$ suite numérique.

$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = S_N$. somme partielle.

$S_0 = u_0$
$S_1 = u_0 + u_1$
$S_2 = u_0 + u_1 + u_2$.
$\vdots$

Ceci définit donc une suite : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique est appelée la suite des sommes partielles.

Exemple : $u_n = n$. $(u_n)_n$ est une suite numérique.

$(S_n)_n$: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 0 + 1 + 2 \dots + n$.

$v_n = \frac{1}{n}$. $S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$. ($v_0$ n'est pas définie)

$(U_n) \rightsquigarrow (S_n)_n$

Définition d'une série : la suite des somme partielle est appelé la série de terme général u_n. On la note $\boxed{\sum_{n\geq 0} u_n.}$

le premier élément de la suite peut être différent de 0.

on peut commencer à partir d'un $n_0 \in \mathbb{N}$.

par exemple pour la suite. $u_n = \frac{1}{n}$. $n_0 = 1$.

plus généralement, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut considérer $\sum_{n\geq n_0} U_n$.

étant donné $(n_0 \in \mathbb{N})$.

comme la série de terme général. U_n.

Dans ce cas, les somme partielle changent.

elles sont de la forme $\sum_{n=n_0}^{N} u_n = S_N$.

Définition de la convergence d'une série :

On dit qu'une série de terme général u_n est convergente ($\sum_{n\geq 0} u_n$ cv) ssi la suite des somme partielle est convergente.

c'est à dire $(S_n)_n$ est cv. ($\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et fini).

. Dans ce cas (convergence), On note S la limite de (S_n) (la limite de $\sum_{n\geq 0} u_n$) $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

. Cette série est dite divergente si $(S_n)_n$ est divergente.

. On dit que deux série de terme général u_n et v_n sont de la même nature si les deux convergent ou divergent

Remarque : $\sum_{n\geq 0} u_n$. $\sum_{n\geq n_0} u_n$ $n_0 \geq 0$

sont de la même nature. et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Exemple : Série géométrique :

sont les série définies par des suites géométrique :

$a \in \mathbb{R}_*^+$ $u_n = a^n$ est une suite géométrique, et $\sum_{n\geq 0} a^n$

est géométrique : la série définie par.

Cherchons la limite de $u_n = a^n$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\#$ distances. $\longrightarrow n-n_0+1$

$\sum_{n=n_0}^{n} q^n = q^{n_0} \frac{1-q^{\dots}}{1-q}$

premier terme.

$\left(\frac{1}{-5}\right)^n = \frac{1}{(-5)^n} = 0$

S_n les somme partielle de $\sum_{n\geq 0} u_n$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$.

$\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5^n} = 0$.

$a < 1 = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

si $a = 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^n = 1 + 1 \dots + 1^n = n+1$.

(5^n)

Donc, à la limite, $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ \frac{1}{1-a} & \text{si } a < 1 \\ +\infty & n = 1 \end{cases}$

si $a \leq 1$. $\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-a}$.

$(S_n)_n$ est cv ssi $a < 1$. $\sum_{n\geq 0} a^n$ est cv ssi $a < 1$.

Dans ce cas, on écrit $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

L'écriture à adopter dorénavant $\sum_{n\geq 0} a^n$ cv. $(a < 1)$

et admet $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Série harmonique : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

On considère $(S_n)_n$.

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on montre qu'elle n'est pas de Cauchy :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $|S_{2n} - S_n| = \left|\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right| \geq \left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}\right| = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

indice dans la somme. $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{2n} \frac{1}{n}$.

$\underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fois}}$

$(2n-(n+1)+1)$

$n+1 \leq k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$. On a donc trouvé $p = 2n$, $q = n$ tq : $|S_p - S_q| \geq \frac{1}{2}$.

Donc $(S_n)_n$ n'est pas de Cauchy. Elle est donc divergente.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall p,q \geq n_0 : |u_p - u_q| \not\leq \varepsilon$.

$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0, \exists p,q \geq n_0 : |u_p - u_q| > \varepsilon$.

$f(n) = n^2$ $\qquad \sum_n \frac{1}{n} f(n) \quad (s_0, s_1, \dots)$

$u_n = n \longrightarrow \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{n} f(n)\right)$ $\qquad \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \in \mathbb{R}$

$f : x \longrightarrow \cancel{\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}\right) f(x)}$ $\qquad \underbrace{(S_n)_n \cdot f(x)} \qquad (S_n f(n))_n$

$x \to +\infty$

$f(n) = n^2$. $\quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} f(n) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} n^2 = \sum_{n\geq 0} n \longrightarrow +\infty$.

$f(n) = \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} f(n) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^3}$ converge.

$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}\right) \sim (S_n) = \sim S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} n}$

$\sum_{n\geq 0} 3^n \qquad 3^n \not\to 0$

Critère triviale de la divergence.

si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(si $u_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente).

Dans le cas où u_n ne tend pas vers 0, on dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement (trivialement).

Critère de Cauchy :

- Une série $\sum u_n$ est convergente ssi :

Critère de Cauchy :

- Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente ssi :

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0>0, \forall p\in\mathbb{N}, \forall n>n_0 : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon .$$

Reste d'une série :

soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente.

On appelle le reste d'ordre n (de rang n) $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = R_n$.

$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

$$S_n + R_n = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} u_n = S.$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_n + \sum_{n+1}^{+\infty} u_n$$

Démonstration : $\sum_{n\geq 0} u_n$ cv. $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$

donc : $R_n = S - S_n \to \lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S - S_n = S - \lim_{n\to+\infty} S_n$
$= S - S = 0$.

Remarque : soit (u_n), (v_n).

- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent, alors $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ est convergente.

et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ $\left(\sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n \right)$ l'espace des suites.

- de même pour $\lambda \cdot \sum_{n\geq 0} u_n =: \sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ est convergente.
- $\sum_{n\geq 0} 0 \in$ l'espace des séries cv.

Donc l'espace des série convergente est un espace vectoriel.

en fait c'est un sous espace vectoriel de l'espace vect des suites cv.

- si $\sum u_n$ converge. $\sum v_n$ diverge. alors : $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ diverge.
- Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge $\not\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ diverge.

exp : $U_n = n$. $\sum_{n\geq 0} n$ div

$V_n = -n$: $\sum_{n\geq 0} -n$ div.

$\sum_{n\geq 0} n + (-n) = \sum_{n\geq 0} 0$ est convergente.

$U_n = 3n$.

$V_n = n^2$

$\sum n^2 + 3n \longrightarrow$ diverge.

Séries à termes positifs :

Une série est à terme positifs si $(U_n)_n$ est positive. (ie) $\forall n : U_n \geq 0$.

$\sum_{n\geq 0} U_n$. (S_n).

↳ Résultat : la suite des sommes partielles est croissante.

en fait : $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = U_{n+1} \geq 0$.

↳ Résultat : $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente ssi $(S_n)_n$ est majorée.

Ce si (S_n) n'est pas majorée alors : $\sum_{n\geq 0} U_n$ est divergente.

de plus on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = +\infty$. $\left(S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\right)$.

Majoration : $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à T +.

si $u_n \leq v_n$ on a :

- si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- si $\sum_{n\geq 0} U_n$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Exemple : $U_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$ $\quad \sum_{n\geq 0} U_n$:

$$0 \leq e^n - 1 \leq e^n \Leftrightarrow \ln(e^n - 1) \leq \ln(e^n) = n.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln(e^n - 1)} \geq \frac{1}{n}$$

$\to v_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)} \geqslant \dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \dfrac{1}{n} = u_n.$

on a : $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ est divergente, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}$ est aussi divergente.

$v_n = \dfrac{\sin(\sqrt{n})^2}{n^2}$, on a : $\sin(\sqrt{n})^2 \leqslant 1$.

donc : $\dfrac{\sin(\sqrt{n})^2}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$ cv $a>1$.

$\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2}$ est convergente, et donc : $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(\sin(\sqrt{n}))^2}{n^2}$ est convergente.

Critère de l'équivalence : si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors : $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont de la même nature.

$\left(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \quad \lim\limits_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \right)$.

Exemple : $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = U_n$. $\lim_{+\infty} U_n = 1$.

$\frac{1}{\frac{1}{n}}$ $\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. $\boxed{\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1}$

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$U_n \underset{+\infty}{\sim} 1$. $\sum_{n \geq 0} 1$ est divergente donc $\sum_{n\geq 0} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

$\left(\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \Rightarrow \left[\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ diverge}\right]\right)\right)$.

$\frac{n^\alpha}{x^n} \to 0$

• $U_n = \frac{8^n + n^4}{15^n - 2n!}$; $8^n + n^4 \sim 8^n$; $\frac{8^n + n^4}{8^n} = 1 + \frac{n^4}{8^n} \xrightarrow[+\infty]{} 1$. ($\frac{n^4}{8^n} \to 0$) ; $15^n - 2n! \to 15^n$.

$\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

$U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{8^n}{15^n} = \left(\frac{8}{15}\right)^n = V_n$.

$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{8}{15}\right)^n$ est convergente car $\left(\frac{8}{15}\right)^n$ est

- $n >> \sqrt{n}$.
- $n >> \ln(n)$
- $\sqrt{n} >> \ln(n)$
- $e^n >> n^\alpha$.
- $n! >> e^n$.

Be In Sciences

x^n

• $U_n = \dfrac{8^n + n^4}{15^n - 2\sqrt{n}}$ $\sim 8^n$: $\dfrac{8^n + n^4}{8^n} = 1 + \dfrac{n^4}{8^n} \xrightarrow[+\infty]{} 1$. $\dfrac{n^4}{8^n} \to 0$.

$\sim 15^n$.

$\dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} - \ n \gg \sqrt{n}. \\ - \ n \gg \ln(n) \\ - \ \sqrt{n} \gg \ln(n) \\ - \ e^n \gg n^\alpha. \\ - \ n! \gg e^n. \\ = \ n^n \gg n!. \end{array}}$$

$U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{8^n}{15^n} = \left(\dfrac{8}{15}\right)^n = V_n$.

$\sum_{n\geq 0} \left(\dfrac{8}{15}\right)^n$ est convergente car $\left(\dfrac{8}{15}\right)^n$ est une suite géométrique de raison < 1.

par suite $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente.

Be In Sciences

Be In Sciences

Be In Sciences

Be In Sciences

Be In Sciences

Be In Sciences

Be In Sciences