Séance 5 : Intégrales généralisés

samedi 9 avril 2022 23:22

Def : intégrales impropres :

- $\int_a^b f(x)\,dx = I$ f : défini sur $[a,b]$.

- $\int_a^b f(x)\,dx$ $a, b = \pm\infty$; $a ; b$: } points incertaines.

Exemple : $f(t) = \frac{\sin|t|}{|t|^{3/2}}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ à un dns.

3 points incertains : $+\infty, -\infty, 0$.

1. 2. Convergence / divergence.

1. f : continue sur $[a, +\infty[$. on dit $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si la limite $(x \to +\infty)$ de la primitive. $\int_a^X f(t)\,dt$ existe et finie.

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(t)\,dt$$

Ds le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

2. f : continue sur $]a,b]$. on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. si la limite à droite, $x \to a$. de $\int_z^b f(t)\,dt$ existe et finie.

$$\lim_{x \to a^+} \int_z^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Exemples :

① $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ convergent.

en effet : $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\mathrm{Arctg}(t)]_0^x = \mathrm{Arctg}(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{Arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$\int^{+\infty}$

$x \to +\infty \quad \int_0 \quad 1+t^2 \quad x \to +\infty$

② $$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t}$$ divergent

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \left[\ln|1+t|\right]_0^x = \ln(1+x)$$

$$\lim_{+\infty} \ln(1+x) = +\infty$$

③ $$\int_0^1 \ln(t)\, dt$$ Convergent.

$$\int_x^1 \ln(t)\, dt = \left[t\ln(t) - t\right]_x^1$$
$$= -1 - (x\ln(x) - x)$$
$$= x - x\ln(x) - 1$$

$$\lim_{0^+} (x - x\ln(x) - 1) = -1 \qquad \lim_{0} x^n \ln(x) = 0$$

④ $$\int_0^1 \frac{dt}{t}$$ diverge. : points incertains : 0 .

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0^+} \left[\ln(t)\right]_x^1 = \lim_{x \to 0^+} -\ln(x) = +\infty \;!!$$

Relation de Chasles :

$f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. et $a' \in [a,+\infty[$. alors :

$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ et $\int_{a'}^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de m̂ nature.

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \int_a^{a'} f(t)\, dt + \int_{a'}^{+\infty} f(t)\, dt .$$

linéarité : $$\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)\, dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t)\, dt$$

Positivité : si $f \leq g$ alors : $$\int f(t)\, dt \leq \int g(t)\, dt .$$

Positivité : si $f \leq g$ alors : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$.

si $f \geqslant 0$ alors : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \geqslant 0$.

· Cas de deux points incertains :

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

$\int_a^b f(t)\,dt$ converge si il existe $c \in]a,b[$ tq : $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$

convergente.

$$\underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{CV} = \underbrace{\int_a^c f(t)\,dt} + \underbrace{\int_c^b f(t)\,dt}_{CV}$$

Contre exemple : $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,.dt$

$$\int_{-X}^{X} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-X}^{X} = \frac{X^2}{2} - \frac{X^2}{2} = 0 \longrightarrow 0 \quad CV \ \times$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt}_{div} = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} t\,dt}_{div} + \underbrace{\int_0^{+\infty} t\,dt}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t\,dt = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0 = \lim_{x \to \infty} -\frac{x^2}{2} \to +\infty$$

Exemple : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,.dt}{(1+t^2)^2} = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}}_{CV} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt}_{CV}$$

Points incertains : $-\infty, +\infty$.

$$\bullet \int_x^0 \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\int_x^0 \frac{(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{(1+t^2)}\right]_x^0 \qquad \frac{f'}{f^2}$$

- $\displaystyle\int_x^0 \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\int_x^0 \frac{(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{(1+t^2)}\right]_x^0$ $\qquad \dfrac{t}{t^4}$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\cdot\left[1 - \frac{1}{1+x^2}\right] \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{1}{2}$ CV

- $\displaystyle\int_0^X \frac{t\,dt}{(1+t^2)} \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\frac{1}{2}$ CV

d'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergent.

Mini exercices : Ex1) 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\,dt$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln(2)} e^t\,dt$

Ex2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ $\qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dt}{(t-1)^2}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt$ $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t}$.

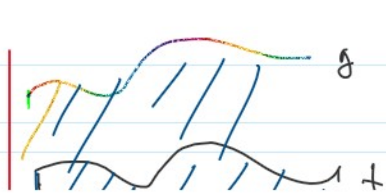
2. fonctions positives. (ou negative)

Theorème de Comparaison :

Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[a, +\infty[$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de $+\infty$:

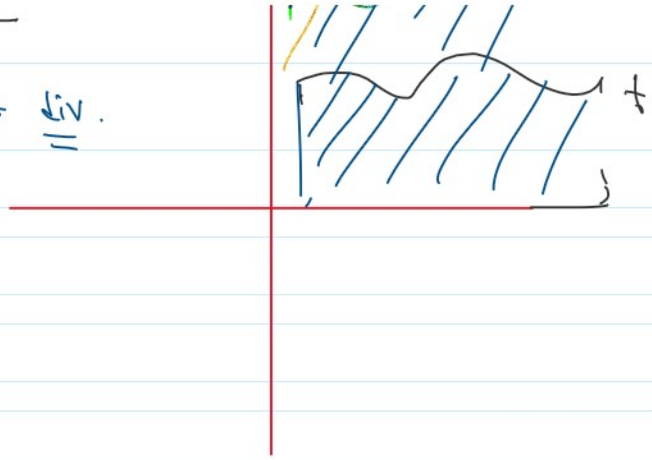
$$\exists A \geq a \quad \forall t \geq A \quad f(t) \leq g(t)$$

1. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ CV alors : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ CV.



2. Si $\displaystyle\int^{+\infty}$ [illegible] $\displaystyle\int^{+\infty}$ [illegible]

✓ 2. Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ div alors : $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ div.



Exp : $$\int_1^{+\infty} t^\alpha . e^{-t}\,dt. \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

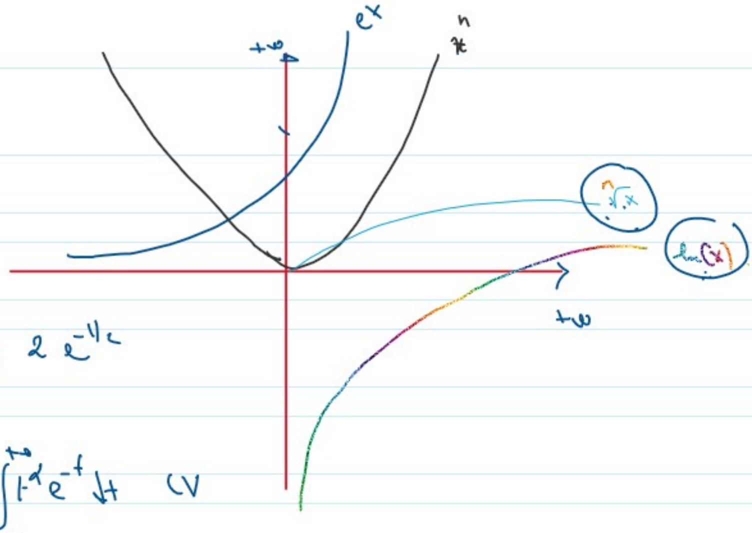
* $t^\alpha . e^{-t} = t^\alpha . e^{-t/2}\, e^{-t/2}$

* $\lim_{+\infty} t^\alpha e^{-t/2} = 0$: (car l'exponentielle l'emporte sur la puissance).

* $\exists A > 0$ tq :

  $\forall t > A$: $t^\alpha e^{-t/2} \leq 1$

  $t^\alpha . e^{-t} \leq e^{-t/2}$



* $$\int_0^X e^{-t/2}\,dt = 2.e^{-1/2} - 2.e^{-X/2} \xrightarrow[+\infty]{} 2\,e^{-1/2}$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}\,dt$ est CV alors : $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,dt$ CV

2.2. Théorème des équivalents :

f et g. Continues et strictement positive sur $[a, +\infty[$. Supposons qu'elles sont équivalentes au $V(+\infty)$:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$$

alors : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ CV si et seulement $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ CV.

Exp : $$\int_1^{+\infty} \overbrace{\frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4}\, e^{-t}}^{f(t)}\,dt.$$

$$\frac{t^5 + 3t + 1}{4 + t^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^5}{t^3} = t^2$$

$$\frac{t^5+3t+1}{4+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^5}{t^3} = t^2$$

$$\frac{t^5+3t+1}{4+t^3} . e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} t^2 . e^{-t}$$

$$\int_1^{+\infty} t^2 . e^{-t} \, dt : \text{ CV} \quad \text{alors} \quad \int_1^{+\infty} f(t)\, dt \quad \text{CV}$$

2.3. Integrals de Riemann :

- $$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{CV} \quad \text{si} : \alpha > 1.$$

- $$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{CV} \quad \text{si} \quad \alpha \leqslant 1.$$

Integrals de Bertrand:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\,(\ln(t))^\beta} \quad \text{CV si } \beta > 1.$$

$$\text{div si } \beta \leqslant 1.$$

Exp:

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2+3t}\, \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \sin^2\left(\frac{1}{\ln(t)}\right) dt.$$

· Points incertains : $+\infty$:

$V(+\infty)$: · $\sqrt{t^2+3t} = \sqrt{t^2\left(1+\frac{3}{t}\right)} = t\sqrt{1+\frac{3}{t}} \underset{+\infty}{\sim} t$

· $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2}$

· $\sin^2\left(\frac{1}{\ln(t)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln^2(t)}$

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{\ln^2(t)} \cdot \frac{1}{2t^2} \cdot \cancel{t} = -\frac{1}{2t \cdot \ln^2(t)}$$

or: $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2(t)}$ est convergent (Integrale de Bertrand).

alors : $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ CV.

Devoir exercice : ① $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\cdot\sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

② $\int_{3/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot e^{-|t|}\cdot dt$

④ $\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{e^{-t}}{t^2+1}\, dt$.

③ Fonction oscillantes :

3.1 Intégrale absolument convergente :

f continue sur $[a,+\infty[$. on dit $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument CV si

$\int |f(t)|\,dt$ est CV.

Exp :

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}$

$\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{CV}$

or : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$: $(\alpha=2>1)$ CV

$\int \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| dt$ CV $\Rightarrow \int \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt$ A.CV. $\Rightarrow$ CV

CV $\not\Rightarrow$ abs CV.

Intégrale semi convergent :

un intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est semi-convergente si elle est CV mais pas absolument CV.

Exp: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

$\begin{cases} u' = \sin(t) \\ v = 1/t \end{cases}$ $\int_1^{x} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left. -\frac{\cos(t)}{t}\right|_1^{x} - \int_1^{x} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$

(CV) = (CV)

$\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ cv $(\alpha = 2 > 1)$

* $\int^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$ div

$\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$

$|\sin(t)| \leq 1.$

$\sin^2(t) \leq |\sin(t)| \leq \cos^2(t) + \sin^2(t)$.

$\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$

$\underbrace{\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|}_{\text{div}} \geq \underbrace{\frac{1-\cos(2t)}{2t}}_{\text{div}}$.

$u' = \cos(2t)$ $v = 1/t$.

$\int_1^{x} \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \int \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt.$

$$\underbrace{\int_1 \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,dt}_{\text{div}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \cdot \int \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt.$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\ln t\right)_1^x}_{+\infty} - \frac{1}{4}\cdot \underbrace{\left[\frac{\sin(2t)}{t}\right]_1^x}_{0.} - \underbrace{\frac{1}{4}\int \frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt}_{cv}$$