PROBLEME I

En mécanique classique non relativiste, l'énergie totale d'une particule est la somme de son énergie cinétique E_C et de son énergie potentielle E_p :

$$E = E_c + E_p$$

En mécanique classique relativiste, l'énergie totale d'une particule de masse au repos m est :

$$E = E_c + E_p + m c^2$$

où $c = 3.10^8$ m/s est la célérité de la lumière dans le vide.

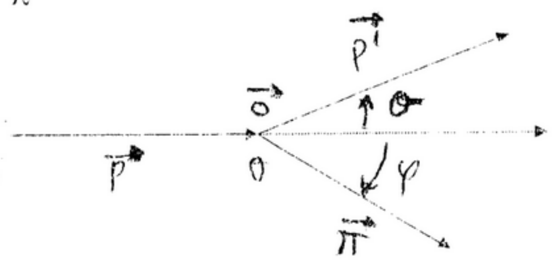
On montre en théorie relativiste que :

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

où p est l'impulsion de la particule en mouvement.

QUESTIONS

Soit une collision entre un photon incident de longueur d'onde λ (ou de fréquence $\nu = \frac{c}{\lambda}$) et un électron libre placé en un point O selon le schéma suivant:



$\vec{p}$ et $\vec{p}'$ sont les quantités du mouvement du photon, $\vec{0}$ et $\vec{\pi}$ celles de l'électron libre respectivement avant et après la collision. E et E' sont les énergies du photon, ε_0 et ε celles de l'électron avant et après la collision.

1- Donner (sans calculs) la relation de Compton qui exprime la variation de la longueur d'onde $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ en fonction de l'angle de diffusion θ et de la constante de Compton $\lambda_c = \frac{h}{mc}$; sachant que λ' (ou $\nu' = \frac{c}{\lambda'}$) est la longueur d'onde (ou la fréquence) de photon après la collision.

2- La collision étant élastique, écrire les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie.

3- Vérifier que l'énergie cinétique de l'électron diffusé est donnée par:

$$E_c = E - E'$$

4- En utilisant la relation de Compton, montrer que :

$$E_c = \frac{h^2\nu^2(1-\cos\theta)}{mc^2 + h\nu(1-\cos\theta)}$$

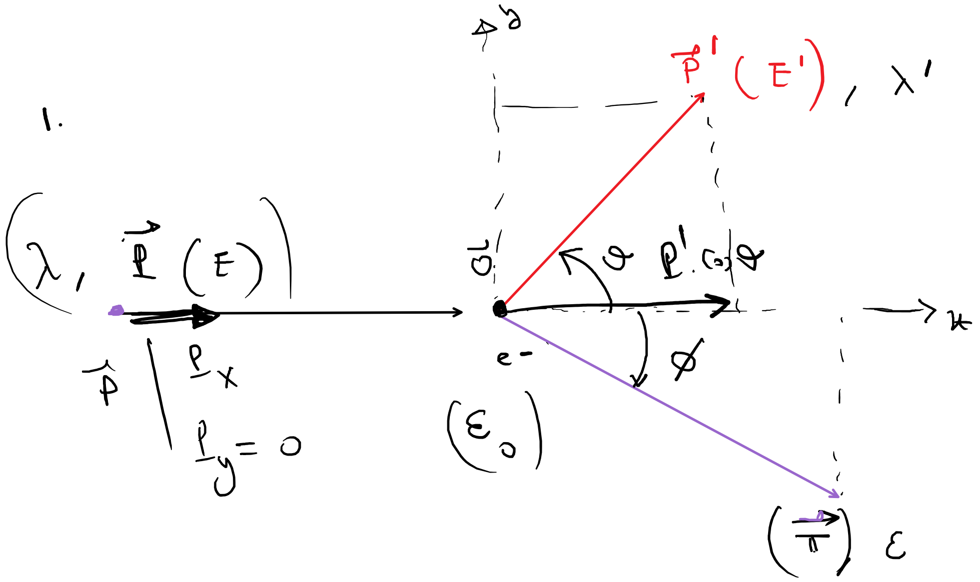
5- Dans le cas particulier où le photon diffusé est détecté sous un angle droit, déterminer la fonction $E' = f(E)$ à l'aide des lois de conservation.

Indication : utiliser la relation $E = pc$ au lieu de $h\nu$

6- Mettre E' sous forme $E' = \frac{aE}{1+bE}$ où a et b sont des constantes à déterminer et discuter les cas limites: $E \gg mc^2$, $E = mc^2$ et $E \ll mc^2$

1

1.



$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta)$$

2) les lois de conservation:

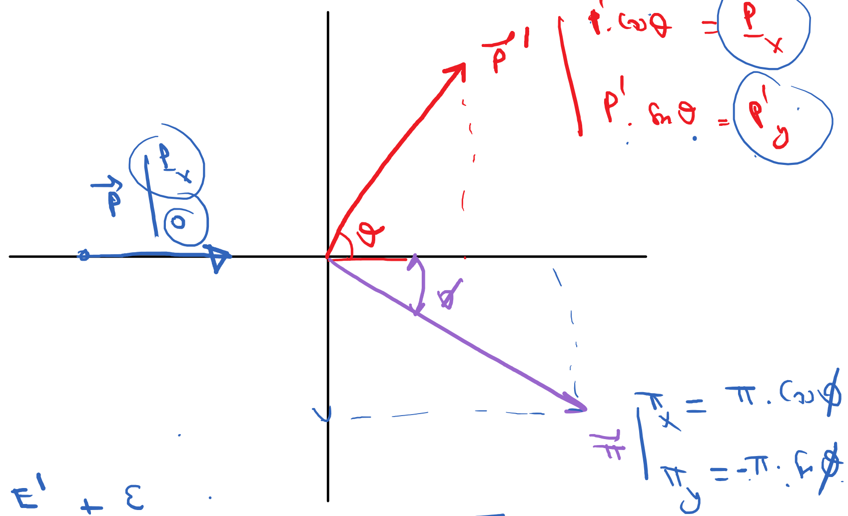
avant le choc Après le choc.

avant le choc — Après le choc.

$$\underline{\underline{\vec{P}}} + \vec{O} = \vec{p}' + \vec{\pi} \quad (1) \cdot e_x$$

$$E + \varepsilon_0 = \underline{\underline{E'}} + \underset{\sim}{\varepsilon} \quad ✓ \ (2)$$

$$(1) \begin{cases} P = p'.\cos\theta + \pi.\underline{\underline{\cos\phi}} \ ✓ & \text{suivant } (ox) \\ 0 = p'.\sin\theta - \pi.\sin\phi \ ✓ & \text{suivant } (oy) \end{cases}$$



$$(2) : E + \varepsilon_0 = E' + \varepsilon$$

$$(2)' \quad P.c + m_e.c^2 = p'.c + \sqrt{m^2.c^4 + \pi^2.c^2}$$

$$(1) \Rightarrow \quad \cos\phi = \frac{P}{\pi} - \frac{p'}{\pi}.\cos\theta$$

$$\sin\phi = \frac{p'}{\pi}.\sin\theta$$

$$P^2 + p'^2.\cancel{\cos^2\theta} - 2.P.p'.\cos\theta + p'^2\sin^2\theta = \pi^2$$

$$\left(\frac{P - p'.\cos\theta}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{p'}{\pi}.\sin\theta\right)^2 = 1$$

$$(P - p'.\cos\theta)^2 + p'^2.\sin^2\theta = \pi^2$$

$$P^2 + p'^2 - 2Pp'.\cos\theta = \pi^2$$

$$(2)' \Rightarrow \left(m_e^2 \cdot c^4 + \pi^2 \cdot c^2\right) = \left(\left(p - p'\right) \cdot c + m_e c^2\right)^2$$

$$\cancel{m_e^2 c^4} + \pi^2 \cdot \cancel{c^2} = \left(p - p'\right)^2 \cdot \cancel{c^2} + \cancel{m_e^2 \cdot c^4} + 2\left(p - p'\right) c \cdot m_e \cancel{c^2}$$

$$\pi^2 = \left(p - p'\right)^2 + 2\left(p - p'\right) \cdot c \cdot m_e$$

$$\cancel{p^2} + \cancel{p'^2} - 2pp' \cos\vartheta = \cancel{p^2} + \cancel{p'^2} - 2pp' + 2 m_e c \left(p - p'\right)$$

$$\cancel{2} m_e c \left(p - p'\right) = \cancel{2} pp' \left(1 - \cos\theta\right)$$

$$p - p' = \frac{p \cdot p'}{m_e c} \cdot \left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\frac{\cancel{h}}{\lambda} - \frac{\cancel{h}}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda \lambda'} \cdot \frac{\cancel{h^2}}{m_e c} \left(1 - \cos\vartheta\right)$$

$$\lambda \lambda' \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{\lambda \cancel{\lambda'}}{\lambda \cancel{\lambda'}} \frac{h}{m_e c} \left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\Lambda\ \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} \left(1 - \cos\vartheta\right) \parallel \neq 0$$

$$\boxed{\lambda' \neq \lambda}$$

3)

$$E + m_e c^2 = E' + \mathcal{E}$$

$$E + \cancel{m_e c^2} = E' + E_c + \cancel{m c^2}$$

$$\boxed{E_c = E - E'}$$

4)

$$E_c = h\nu - h\nu' = h\nu\left(1 - \frac{\nu'}{\nu}\right) = h\nu\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) (i)$$

4) $E_c = h\nu - h\nu' = h\nu\left(1 - \frac{\nu'}{\nu}\right) = h\nu\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right)$ (i)

$$E_c = h\nu\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_c(1-\cos\theta)}\right)$$

$$= h\nu\left(\frac{\cancel{\lambda} + \lambda_c(1-\cos\theta) - \cancel{\lambda}}{\lambda + \lambda_c(1-\cos\theta)}\right)$$

$$= \frac{(h\nu)(1-\cos\theta)}{\frac{\lambda}{\lambda_c} + (1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\nu}{h\cdot\nu\ \frac{c}{\nu\cdot h\nu\ \lambda_c}\left(+1(1-\cos\theta)\right)} = h\nu^2.$$

$$= \frac{h^2\cdot\nu^2(1-\cos\theta)}{\frac{h\cdot c}{\lambda_c} + h\nu(1-\cos\theta)}$$

$$\left(E_c = \frac{h^2\cdot\nu^2\cdot(1-\cos\theta)}{mc^2 + h\nu(1-\cos\theta)}\right)$$

$E = h\nu$

5. $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$E - E' = \frac{E^2}{mc^2 + E} \quad v$$

$$E' = E - \frac{E^2}{mc^2+E} = \frac{mc^2\cdot E + \cancel{E^2} - \cancel{E^2}}{\ } = \frac{mc^2\cdot E}{mc^2+E}$$

$$E' = f(E) = \frac{mc^2 E}{mc^2 + E} = \frac{E}{1 + \frac{E}{mc^2}} = \frac{aE}{1+bE} \quad (i)$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{mc^2} \end{cases}$$

i) $E \gg mc^2 \Rightarrow \frac{E}{mc^2} \gg 1 \Rightarrow E' = \frac{\cancel{E}}{\frac{\cancel{E}}{mc^2}} \simeq mc^2 \simeq \mathcal{E}_0$

$E \ll mc^2 \Rightarrow \frac{E}{mc^2} \ll 1 \Rightarrow E' \simeq E$

$E = mc^2 \Rightarrow E' = \frac{E}{2}$

π

$$\leftarrow \begin{cases} \vec{p} + \vec{0} = \vec{p}' + \vec{\pi} \\ E + m_0 c^2 = E' + \mathcal{E} \end{cases}$$