Série 1

Partie A - Caractère corpusculaire de la lumière

I. Rayonnement du corps noir

Le champ électromagnétique à l'intérieur d'une cavité fermée est équivalent à un ensemble dénombrable d'oscillateurs harmoniques linéaires et indépendants. L'énergie du champ est donc égale à l'énergie de ces oscillateurs.

On définit la densité d'énergie $u(\nu,T)$ comme :

$$u(\nu,T) = \rho(\nu)\langle E \rangle$$

où $\rho(\nu)$ est le nombre des oscillateurs par unité de volume, $\langle E \rangle$ est l'énergie moyenne de chaque oscillateur, ν est la fréquence et T la température absolue.

1. Dans la théorie de l'électromagnétisme classique, l'énergie E d'un oscillateur varie de façon continue et on montre que le nombre d'oscillateurs dont l'énergie est comprise entre E et $E + dE$ est donnée par :

$$dN = P(E)\, dE = a\, e^{-E/kT}\, dE$$

où k est la constante de Boltzmann et $P(E)$ la probabilité associée à l'énergie E.

a. Sachant que $\rho(\nu) = \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}$, établir l'expression de $u(\nu,T)$.

b. On définit $u(T)$ comme : $u(T) = \int_0^\infty u(\nu,T)\, d\nu$.

Quelle est la signification de $u(T)$? En donner l'expression et conclure.

2. Dans le cadre de l'hypothèse de Planck : les échanges d'énergie entre la matière du corps noir et le rayonnement électromagnétique se font par paquets d'énergie égale à $\varepsilon = h\nu$ (quantum d'énergie), h étant la constante de Planck.

L'énergie (continue) des oscillateurs s'écrit alors sous la forme suivante :

$$E_n = n h\nu,\ n \in \mathbb{N}$$

a. Montrer que :

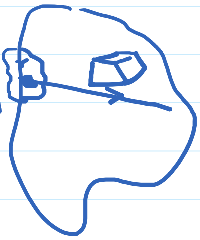
$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

b. En déduire la nouvelle expression de $u(T)$. Conclure.

On donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \quad si\ \alpha < 1 \qquad ; \qquad \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^4}{15}$$

vibration des oscill



$u(\nu T) = \rho(\nu) . \langle E \rangle$
Total

$dN = \underline{P(E)} . dE = a . e^{-E/kT} . dE.$

a) $$e(\nu) = \frac{8\pi.\nu^2}{c^3}$$

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} . \langle E \rangle$$

$$\left\| \ \overline{X}_i = \frac{\sum x_i . p(x_i)}{\sum x_i} \ \right\|$$ x_i : discret.

$$\langle E \rangle = \int_0^{+\infty} E . dN . = \int^{+\infty} E . p(E)\, dE .$$

$$= a \int_0^{+\infty} \underbrace{E}_{u} . \underbrace{e^{-\beta.E}}_{v'} . dE . = [u.v] - \int u'.v$$

$$\langle E \rangle = a \left[\underbrace{E}_{u} . \underbrace{\frac{e^{-\beta E}}{-\beta}}_{v} \right]_0^{+\infty} - a \int_0^{+\infty} 1 . \frac{e^{-\beta E}}{-\beta} . dE$$

$$\langle E \rangle = -\frac{a}{\beta} \underbrace{\left[E . e^{-\beta E} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{a}{\beta} . \int e^{-\beta E} . dE$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\beta} \int a . e^{-\beta E} . dE = \frac{1}{\beta} . \int^{+\infty} p(E) . dE$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\beta} = k_B . T .$$ (Theoreme d'Equipartition d'energie)

densité d'energie : $$u(\nu,T) = \frac{8\pi.\nu^2}{c^3} \langle E \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} . k_B . T = \mathcal{E}_T(\nu)$$

$+\infty$

$$u(T) = \int_0^{+\infty} u(\nu,T)\, d\nu = \int \frac{8\pi}{c^3} k_B T \cdot \nu^2 \cdot d\nu .$$

$u(T)$: l'énergie totale disponible → l'enceinte. $\frac{8\pi}{c^3} k_B T \left. \frac{\nu^3}{3} \right|_0^{+\infty}$

→ cette quantité diverge ⇒ physique absurde.

⇒ Insuffisance de la théorie classique.

2. $\underline{\underline{E_n}} = n \cdot \hbar\nu$.

a) $$\langle E \rangle = \sum_n E_n \cdot P(E_n) = \sum_0^{+\infty} \underline{\underline{E_n}} \cdot e^{-\beta \underline{\underline{E_n}}}$$

$$\langle x_i \rangle = \sum x_i \, P(x_i)$$

$$\langle E \rangle = \sum a \cdot E_n \cdot e^{-\beta E_n}$$

$$= \sum a \cdot n \cdot \hbar\nu \cdot e^{-\beta \cdot n \cdot h\nu}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n) = 1 \quad : \text{C.N.}$$

$$\sum_n a \cdot e^{-\beta \cdot n h\nu} = 1$$

$$\boxed{a = \frac{1}{\sum_n e^{-\beta n \nu \hbar}}}$$

$$a_0 = \frac{1}{\sum_n e^{-\beta n \hbar\omega}}$$

$$\langle E\rangle = \frac{\left(\sum n\hbar\omega \cdot e^{-\beta n\hbar\omega}\right)}{\sum e^{-\beta n\hbar\omega}} = \frac{(N)}{D}$$

$$D = \underline{\underline{\sum_n}} \; e^{-\beta n\hbar\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(e^{-\beta\hbar\omega}\right)}_{q}{}^{n} \qquad q<1$$

$$D = \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$-\frac{\partial D}{\partial\beta} = -\sum \frac{\partial}{\partial\beta}\cdot\left(e^{-\beta n\hbar\omega}\right) = \sum n\hbar\omega\, e^{-\beta n\hbar\omega}$$

$$N = -\frac{\partial D}{\partial\beta}$$

$$\langle E\rangle = \frac{-\partial D/\partial\beta}{D}$$

$$= -\frac{d\ln D}{d\beta} = -\frac{d}{d\beta}\cdot\ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right)$$

$$= +\underline{\underline{\frac{d}{d\beta}}}\cdot\left(\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega\cdot e^{-\beta\hbar\omega}}{}\cdot e^{+\beta\hbar\omega}\left(\frac{f'}{}\right)$$

$$= \frac{h\nu \cdot e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} \cdot \frac{e^{+\beta h\nu}}{e^{+\beta h\nu}} \left(\frac{f'}{f} \right)$$

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{+\beta h\nu} - 1}$$

b. $u(T)$:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot \langle E \rangle = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

$$u(T) = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \, d\nu$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{8\pi}{h \cdot h^2 c^3} \frac{h^3 \nu^3}{(kT)^3} (k_B T)^4 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \, d\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

$$x = \frac{h\nu}{kT}$$

$$u(T) = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi}{h^3 \cdot c^3} x^3 \cdot \frac{1}{e^x - 1} \, dx \, (k_B T)^4$$

$$= \frac{8\pi}{h^3 \cdot c^3} (k_B T)^4 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} \, dx$$

$$u(T) = \frac{8}{h^3 \cdot c^3} \cdot (k_B)^4 \cdot \frac{\pi^5}{15} T^4$$

$$\boxed{u(T) = \overset{n.c}{\sigma} \cdot T^4}$$: loi de Stephan